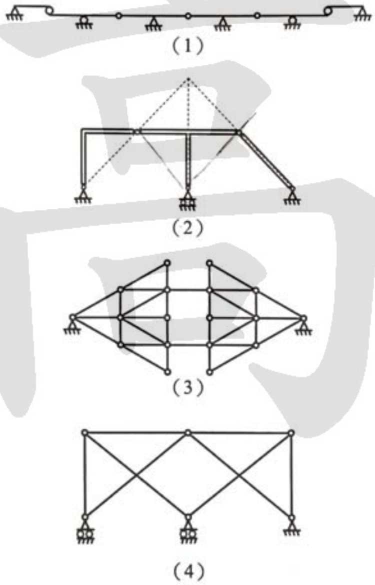
《結構學》

一、圖一中有（1）、（2）、（3）、（4）四個平面結構物，小圓符號代表鉸接或滾接，否則為剛接。請判定它們為不穩定結構或穩定結構？若為不穩定結構，請說明不穩定原因；若為穩定結構，請判別其靜不定的次數R。（R＝0，即表示為靜定結構。）（20分）

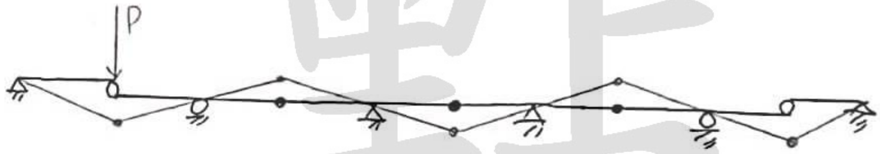


圖一

試題評析	此題屬於結構穩定性分析之基本題型。
考點命中	所有題目不穩定的狀態都是老師教過的題型。

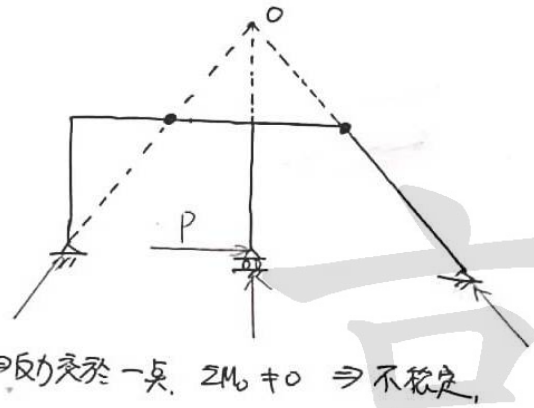
答：

（1）

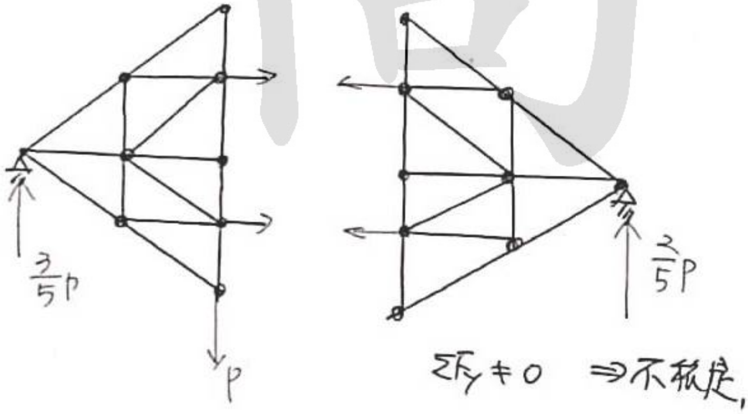


⇒ 三鉸共線 ⇒ 不穩定

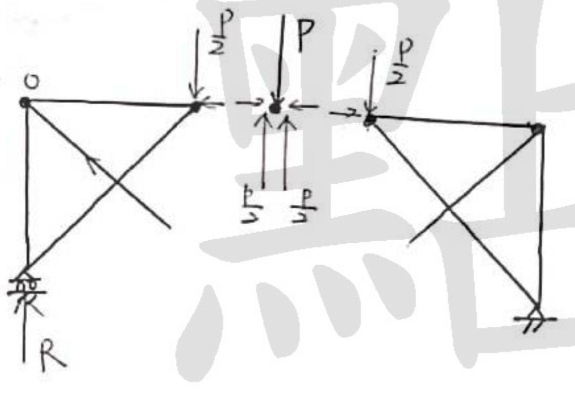
（2）



（3）

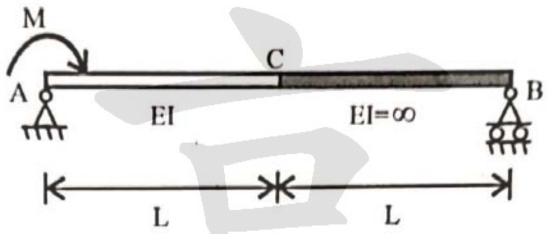


（4）



假設有一集中力P作用在結構中央處鉸接點上，因無水平外力，所以唯一的鉸支承無水平反力，所以結構為對稱結構，故力量分析如上圖所示，取左半邊自由體分析，因$\Sigma Mo \neq 0$，故結構為不穩定結構。

二、圖二唯一水平梁，此梁AC段及BC段之斷面性質不同，AC段為EI、BC斷則為剛性（EI＝∞），相關尺寸配置如圖二所示。若於梁的A端施加一彎矩M，試以共軛梁法求解此梁最大的垂直位移及其與A點的距離，另亦求解A點之轉角。（本題以其他方法求解，一律不予計分。）（25分）

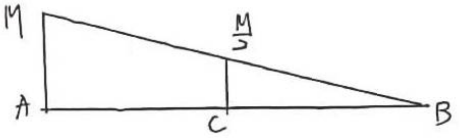


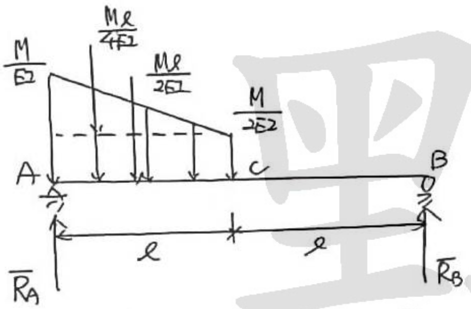
圖二

試題評析	此題屬於共軛樑法基本題型。
考點命中	與洪達老師講義P.6-9範例4一模一樣。

答：

(1) 求 $\theta_A=?$





$\because \Sigma M_B=0$ (+↻)

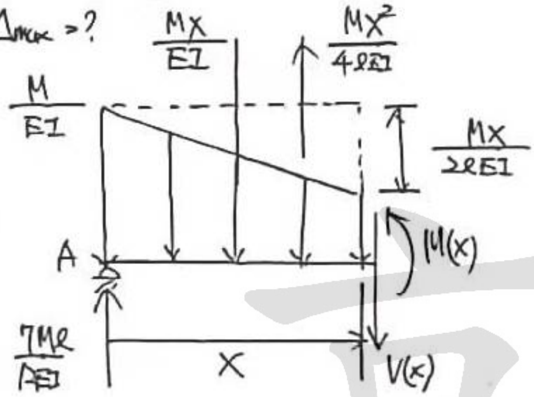
$\therefore \bar{R}_A(2\ell)-\left(\frac{M\ell}{2EI}\right)\left(\frac{\ell}{2}+\ell\right)-\left(\frac{M\ell}{4EI}\right)\left(\frac{2}{3}\ell+\ell\right)=0$

$\therefore \bar{R}_A=\frac{7M\ell}{12EI}$

$\therefore \theta_A=\bar{R}_A=\frac{7M\ell}{12EI}$ (↻)

$\therefore \bar{R}_B=\frac{M\ell}{4EI}+\frac{M\ell}{2EI}-\frac{7M\ell}{12EI}=\frac{M\ell}{6EI}$

（2） 求$\Delta_{max}=?$



$$\because V(x)=\frac{7M\ell}{12EI}+\frac{Mx^2}{4\ell EI}-\frac{Mx}{EI}$$

$$M(x)=\frac{7M\ell}{12EI}(x)+\frac{Mx^2}{4\ell EI}\left(\frac{x}{3}\right)-\left(\frac{Mx}{EI}\right)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{7M\ell}{12EI}x+\frac{Mx^3}{12\ell EI}-\frac{Mx^2}{2EI}$$

令 $V(x)=0$

$$\Rightarrow \frac{7M\ell}{12EI}+\frac{Mx^2}{4\ell EI}-\frac{Mx}{EI}=0$$

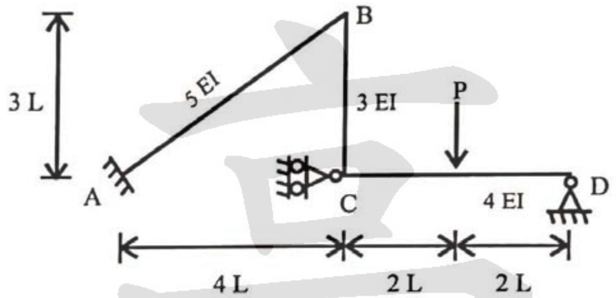
$$\therefore x=0.71\ell$$

$$\therefore M_{max}=M(x)\Big|_{x=0.71\ell}=0.1919\frac{M\ell^2}{EI}$$

$$\therefore \Delta_{max}=0.1919\frac{M\ell^2}{EI}(\downarrow)$$

撓度最大處距A支承 0.71ℓ

三、圖三顯示一剛架結構，B點及C點為剛接，剛架尺寸配置及各桿位斷面之EI值如圖所示。若於CD桿位中點施加一集中載重P，忽略各桿位軸向變形，試用彎矩分配法求解A點、B點、C點之端彎矩M_{AB}、M_{BA}及M_{CB}及C點垂直位移Δ_C，並請繪製此剛架結構受力後之彈性變形圖。（此題以其他方法求解，一律不予計分。）（30分）

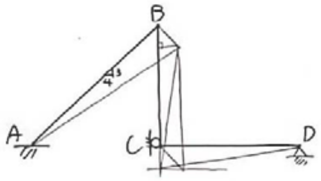


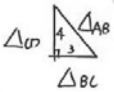
圖三

試題評析	此題屬於綜合彎矩法題型，題目不難，洪達老師有教過，但計算量相當大，同學需要花許多時間計算。雖然計算大，但配分有30分，值得拼一下。
考點命中	與洪達老師講義P.11-24題型相同。

答：

（1）





令 $\Delta_{AB}=\Delta$

$\therefore \Delta_{BC}=\frac{3}{5}\Delta,\ \Delta_{CD}=\frac{4}{5}\Delta$

$$k_{AB}:k_{BC}=\frac{4(5EI)}{5}:\frac{4(3EI)}{3}=1:1$$

$$k_{BC}:k_{CD}=\frac{4(3EI)}{3}:\frac{3(4EI)}{4}=4:3$$

令 $\frac{EI}{\ell^2}\Delta=y$

$$FM_{AB}=FM_{BA}=\frac{-6(5EI)}{(5\ell)^2}\Delta=-1.2\frac{EI\Delta}{\ell^2}=-1.2y$$

$$FM_{BC}=FM_{CB}=-\frac{6(3EI)}{(3\ell)^2}\left(\frac{3}{5}\Delta\right)=-1.2\frac{EI\Delta}{\ell^2}=-1.2y$$

$$FM_{CD}=-\frac{3}{2}\frac{P(4\ell)}{8}+\frac{3(4EI)}{(4\ell)^2}\left(\frac{4}{5}\Delta\right)=-0.75P\ell+0.6\frac{EI\Delta}{\ell^2}=-0.75P\ell+0.6y$$

（2）

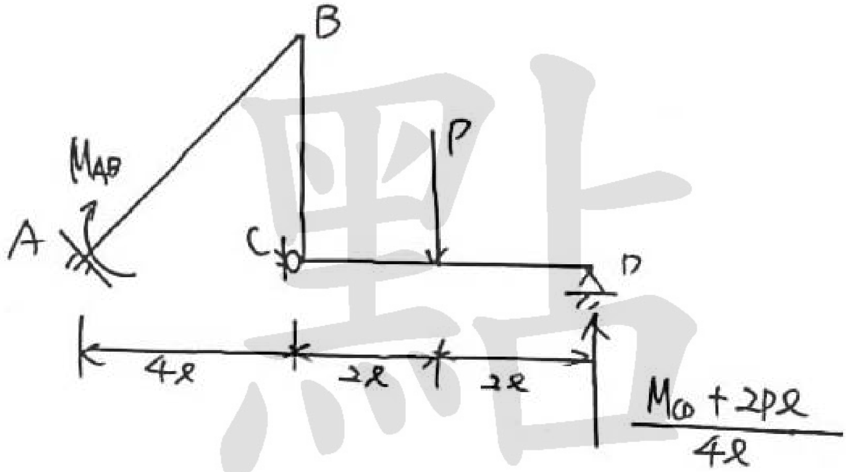
	AB	BA	BC	CB	CD
DF		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$
FM	$-1.2y$	$-1.2y$	$-1.2y$	$-1.2y$	$-0.75P\ell+0.6y$
DM		$2x$	$2x$	$-8x+4.8y$	$\xrightarrow{\times\frac{3}{4}} -6x+3.6y$
COM	x		$-4x+2.4y$	x	
ΣM	$x-1.2y$	$2x-1.2y$	$\to -2x+1.2y$	$-7x+3.6y$	$-0.75P\ell$ $-6x+4.2y$

$\because \Sigma M_C=0$

$\therefore M_{CB}+M_{CD}=0$

$\Rightarrow -13x+7.8y \quad -0.75P\ell=0 \quad -(1)$

（3）



取整体：$\Sigma M_A=0$ ↺+

$\therefore M_{AB}+P(6\ell)-\left(\dfrac{M_{CD}+2P\ell}{4\ell}\right)\times(8\ell)=0$

$\Rightarrow M_{AB}+6P\ell-2M_{CD}-4P\ell=0$

$\Rightarrow (X-1.2Y)-2(-0.75P\ell-6X+4.2Y)+2P\ell=0$

$\Rightarrow X-1.2Y+1.5P\ell+12X-8.4Y+2P\ell=0$

$\therefore 13X-9.6Y+3.5P\ell=0$ —(2)

∴ 由(1)、(2)求得：

$X=0.859P\ell$

$Y=1.5278P\ell \Rightarrow \dfrac{EI}{\ell^2}\Delta=1.5278P\ell \quad \therefore \Delta=\dfrac{1.5278P\ell^3}{EI}$

$\therefore \Delta_C=\dfrac{4}{5}\Delta=1.222\dfrac{P\ell^3}{EI}(\downarrow)$

$\therefore M_{AB}=-0.974P\ell \Rightarrow M_{AB}=0.974P\ell$ (↻)

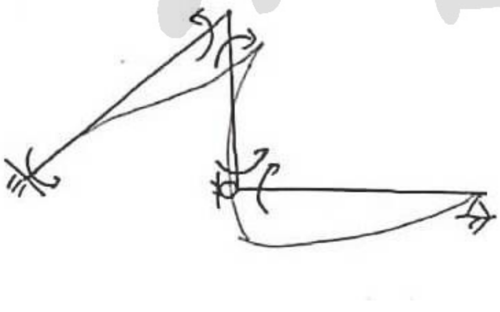
$M_{BA}=-0.1154P\ell \Rightarrow M_{BA}=0.1154P\ell$ (↻)

$M_{BC}=0.1154P\ell$ (↺)

$M_{CB}=-0.513P\ell \Rightarrow M_{CB}=0.513P\ell$ (↻)

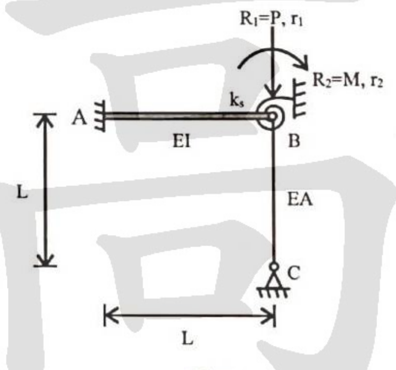
$M_{CD}=0.513P\ell$ (↺)

（4） 彈性變形曲線：



四、圖四顯示一懸臂梁AB與二力桿BC於B點鉸接處使用一螺旋彈簧連結，此彈簧勁度為ks，桿件AB之斷面性質為EI、二力桿件BC為EA。已知B點垂直位移及旋轉之自由度分別為r_1及r_2，相應之垂直力R_1為P、彎矩R_2為M。試依據圖中所示之自由度r_1及r_2，以直接勁度法求此結構之勁度矩陣$[K]_{2x2}$；若考慮M＝0，試求解僅有外力P作用下之勁度矩陣$[K]_{1x1}$，並請依照$[K]_{1x1}$求解B點之垂直位移Δ_B。（此題以其他方法求解，一律不予計分。）（25分）

（已知：$EA/L＝EI/L^3$；$ks=5\ EI/L$）

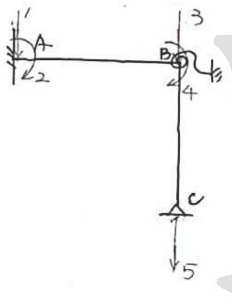


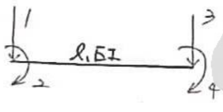
圖四

試題評析	此題因為有樑、有抗彎彈簧、有二力桿件，然後指定要用直接勁度法分析，所以屬於較難的題型。
考點命中	與洪達老師講義P.13-104題型相同。

答：

（1）編號：





$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

（2）

求. $[k]=?$ $[K]=?$

$$[K_{AB}]=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[k_s]=\begin{array}{c} \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} 4 \\ \begin{bmatrix} \frac{6EI}{\ell} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[k_{BC}]=\frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\frac{EI}{\ell^3}\begin{array}{c} \\ 3 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\therefore [K]_{2\times 2}=\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{13EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{9EI}{\ell} \end{bmatrix} \end{array}=\begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r_1 & r_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{13EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{9EI}{\ell} \end{bmatrix} \end{array}$$

（3）

求:剩下 r_1 自由度对应之劲度矩陣 $[K]_{1\times1}=?$

$\because [R]=[K][r]$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{9EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

⇒由題意 $M=0$,將上式矩陣展開得:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{13EI}{l^3} r_1 - \frac{6EI}{l^2} r_2 = P & -(1) \\ -\frac{6EI}{l^2} r_1 + \frac{9EI}{l} r_2 = 0 & -(2) \end{cases}$$

$\therefore$ 由(2)式得 ⇒ $r_2 = \frac{2}{3l} r_1$ ⇒代入(1)式中得,

$$\frac{13EI}{l^3} r_1 - \frac{6EI}{l^2}\left(\frac{2}{3l} r_1\right) = P$$

$$\therefore \quad \frac{9EI}{l^3} r_1 = P$$

$$\therefore \quad [K]_{1\times1} = \left[\frac{9EI}{l^3}\right]$$

$$\therefore \quad r_1 = [K]_{1\times1}^{-1} \times P = \frac{Pl^3}{9EI}$$

$$\therefore \quad \Delta_B = \frac{Pl^3}{9EI} \ (\downarrow)$$