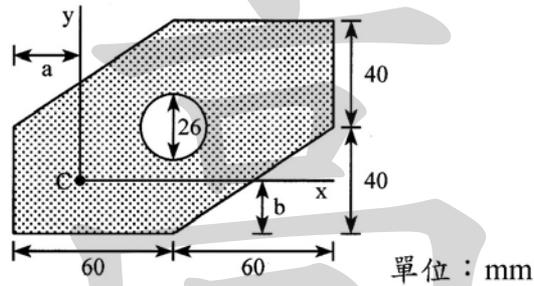


《工程力學(包括材料力學)》

- 一、有一材質均勻之六邊形板尺寸如下圖所示，板中心有一26mm直徑之開孔。試求此板形心C與板邊界之距離a及b。如x與y為通過板形心C之水平軸及垂直軸，試求此板之慣性矩 I_x ， I_y 及慣性矩乘積 I_{xy} 。(25分)



提示：

$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

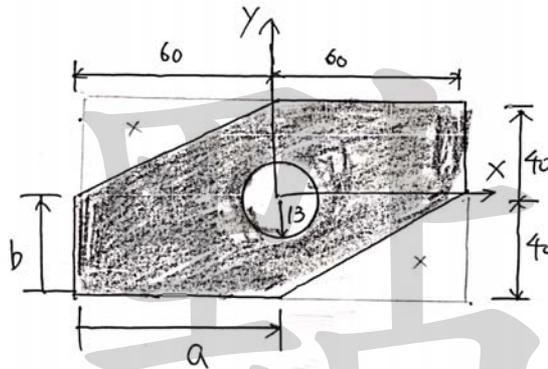
$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$$

試題評析 屬於求面積形心慣性矩基本題型。

考點命中 與洪達老師《突破靜力學》P.5-29題型相同。

解：

- (1) 求a=? b=?



$$a = \frac{80 \times 120 \times 60 - \frac{1}{2} \times 60 \times 40 \times 20 - \frac{1}{2} \times 40 \times 60 \times 100 - \pi (13)^2 \times 60}{80 \times 120 - \frac{1}{2} \times 60 \times 40 \times 2 - \pi (13)^2}$$

$$= 60(\text{mm})$$

$$b = \frac{80 \times 120 \times 60 - \frac{1}{2} \times 60 \times 40 \times 20 - \frac{1}{2} \times 40 \times 60 \times 100 - \pi (13)^2 \times 60}{80 \times 120 - \frac{1}{2} \times 60 \times 40 \times 2 - \pi (13)^2}$$

$$= 40(\text{mm})$$

(2) 求 $I_x=?$ $I_y=?$ $I_{xy}=?$

$$I_x = \frac{1}{12} \times 120 \times 80^3 - \left[\frac{1}{36} \times 60 \times 40^3 + \frac{1}{2} \times 60 \times 40 \left(\frac{2}{3} \times 40 \right)^2 \right] \times 2 - \frac{\pi}{4} (13)^4$$

$$= 3177568.2 \text{ mm}^4$$

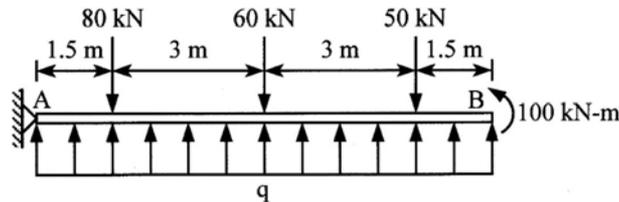
$$I_y = \frac{1}{12} \times 80 \times 120^3 - \left[\frac{1}{36} \times 40 \times 60^3 + \frac{1}{2} \times 40 \times 60 \times \left(\frac{2}{3} \times 60 \right)^2 \right] \times 2 - \frac{\pi}{4} (13)^4$$

$$= 7177568.2 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 0 - \left[-\frac{1}{72} \times 40^2 \times 60^2 + \frac{1}{2} \times 40 \times 60 \times (40) \times \left(-\frac{2}{3} \times 40 \right) \right] \times 2 - 0$$

$$= 2720000 \text{ mm}^4$$

二、一AB水平桿件受一垂直均佈載重 q 、三個垂直集中載重及一個集中彎矩載重，A點為鉸支承（hinge），B點為自由端。若已知該桿件處於靜止狀態，試計算均佈載重 q 之值、A點之水平與垂直反力（包含作用方向），並試繪此桿件之剪力圖及彎矩圖。（25分）

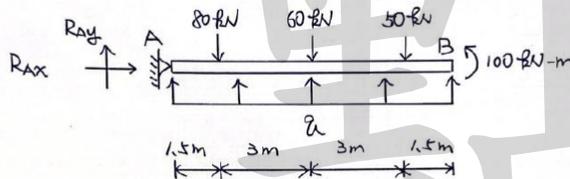
**試題評析**

簡單的求反力與作用力的題目，最後畫出剪力彎矩圖即可得分，送分題囉◎

考點命中

1. 《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，附錄二例題2.5。
2. 《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，附錄二例題2.3.3。

解：

1. 計算均佈載重 q 值、A點水平與垂直反力

設A點鉸支承水平方向反力向右為 R_{Ax} 、垂直方向反力向上 R_{Ay} ，先對A點取力矩平衡可得均佈載重 q 值：

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (q \times 9)(4.5) + 100 - (80 \times 1.5) - (60 \times 4.5) - (50 \times 7.5) = 0$$

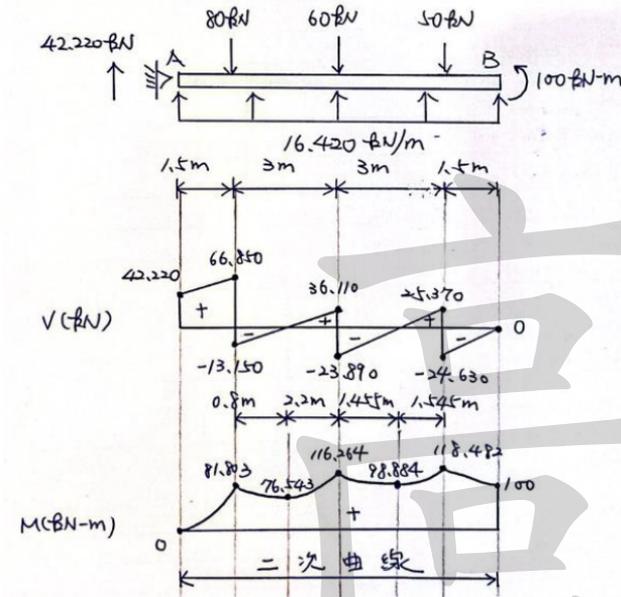
$$\Rightarrow q = 16.420 \text{ kN/m}$$

再由水平與垂直方向力平衡可得 R_{Ax} 與 R_{Ay} ：

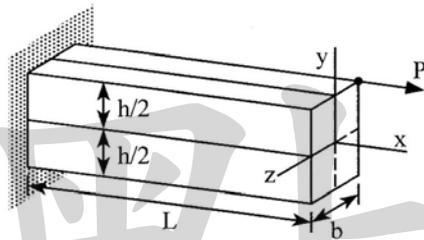
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + (q \times 9) - 80 - 60 - 50 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 42.220 \text{ kN} (\uparrow)$$

2.繪出桿件剪力圖及彎矩圖



三、有一矩形斷面之懸臂梁，梁長度 $L=4\text{m}$ ，寬度 $b=40\text{cm}$ ，高度 $h=60\text{cm}$ 。此梁於自由端受一集中載重 P ， P 平行於 x 軸且作用於梁斷面之角落。此梁任一斷面受到之彎矩 M_y 及 M_z 為何？如此梁所能承受之最大張應力值或最大壓應力值皆不能超過 40MPa ，試計算 P 之最大值為何？（25分）



試題評析	本題幾乎雷同上個月 111 年大地技師一試考題，只不過將 P 力換位置而已，有跟上程老師粉絲團的訊息都會寫到笑出來的。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題7.2.13。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題7.2.3。

解：

1.計算任一斷面所受彎矩 M_y 及 M_z

將拉力 P 移至斷面形心點即 $(y,z) = (0,0)$ 處。由力的等效觀念此時除了有拉力 P 作用尚有額外彎矩 $M_y = Pb/2$ (以 y 軸區分左壓右拉，其中 b 為 40 cm)、 $M_z = Ph/2$ (以 z 軸區分下壓上拉，其中 h 為 60 cm)。

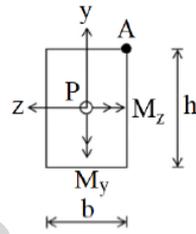
2. 梁承受之最大張(壓)應力值不能超過40 MPa，試計算P之最大值

計算各參數如下：

斷面積 $A = bh = (40)(60) = 2400 \text{ cm}^2 = 240 \times 10^3 \text{ mm}^2$

對z軸慣性矩 $I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{(40 \times 10)(60 \times 10)^3}{12} = 7.2 \times 10^9 \text{ mm}^4$

對y軸慣性矩 $I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{(60 \times 10)(40 \times 10)^3}{12} = 3.2 \times 10^9 \text{ mm}^4$



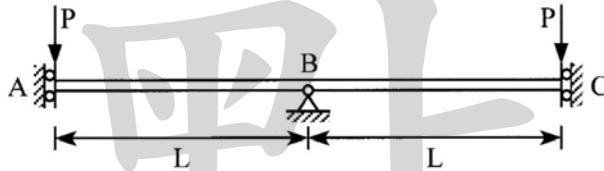
斷面形心已經承受軸拉力P值，考量拉正壓負疊加情形下斷面會先達到拉(張)應力極值，且在 M_y 及 M_z 作用最大拉應力會出現在斷面右上角，令該點最大拉應力值 $\sigma_{t,max}$ 不超過40 MPa可反求P最大值：

最大拉應力值 $\sigma_{t,max} = \frac{P}{A} + \frac{(M_z)(h/2)}{I_z} + \frac{(M_y)(b/2)}{I_y} \leq 40 \text{ MPa}$

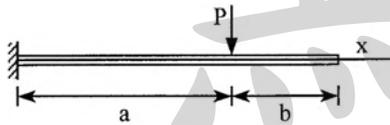
$\Rightarrow \frac{P}{240 \times 10^3} + \frac{(\frac{P \times 600}{2})(30 \times 10)}{(7.2 \times 10^9)} + \frac{(\frac{P \times 400}{2})(20 \times 10)}{(3.2 \times 10^9)} \leq 40 \Rightarrow P \leq 1.371 \text{ MN}$

$\Rightarrow P_{\text{最大值}} = \underline{1371.429 \text{ kN}}$

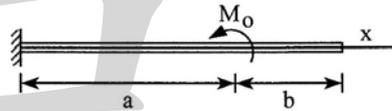
四、有一ABC連續梁，B點為鉸支撐，A點及C點為滑動支撐 (sliding support)，設梁之彎矩勁度為EI。試求B點之反力及作用方向、B點之彎矩 (註明正值或負值)，A點及C點之彎矩 (註明正值或負值)，A點及C點之位移及位移方向。(25分)



提示：考慮對稱性及重疊法



$v(x) = -\frac{Px^2}{6EI} (3a - x), \quad (0 \leq x \leq a)$



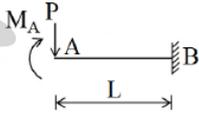
$v(x) = \frac{M_0 x^2}{2EI}, \quad (0 \leq x \leq a)$

試題評析	本題極類似 110 年檢察事務官考題，只不過把左右支承從直線彈簧換成滑動支撐。依照基本變位公式疊加法可快速算出 A 點反力矩，進而算出其餘數值，也是送分題！
考點命中	1. 《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.3.2。 2. 《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.3.12。

解：

1. 計算A點及C點彎矩(註明正值或負值)、B點反力及作用方向

B點為鉸支承故其無撓度(位移)，又本題為對稱結構因此B點沒有撓角(旋轉角)，所以B點的邊界(變形)條件可視為固定端。係因左右對稱故取半分析即可，假設A點滑動支撐處之反力矩 M_A 為順時針，由基本變位公式可得A點轉角(撓角)計算以逆時針為正)：

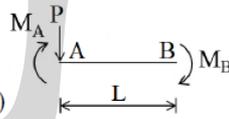
$$\theta_A = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{2EI} - \frac{M_A L}{EI} = 0 \Rightarrow \text{A點彎矩 } M_A = \frac{PL}{2} \text{ (}\cup\text{, 正彎矩)}$$


因是對稱結構故C點彎矩 $M_C = M_A = \frac{PL}{2}$ (∪, 正彎矩)

另由整體桿件力平衡可得B點垂直反力 $R_{By} = 2P$ (↑)、B點水平反力 $R_{Bx} = 0$ 。

2. 計算B點彎矩(註明正值或負值)、A點及C點位移及位移方向

切出桿件AB段可得B點彎矩：

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B + M_A - PL = 0 \Rightarrow \text{B點彎矩 } M_B = \frac{PL}{2} \text{ (負彎矩)}$$


最後由基本變位公式可得A點及C點位移(撓度計算以向下為正)：

$$\Delta_A = \Delta_C = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{M_A L^2}{2EI} = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{(\frac{PL}{2})(L^2)}{2EI} = \frac{PL^3}{12EI} \text{ (↓)}$$

高點