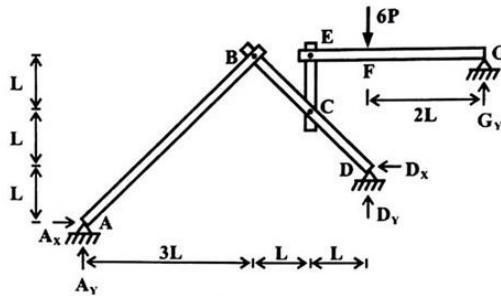


工程力學(包括材料力學)

- 一、圖 1 結構中 A、D、G 點均為鉸支承，桿 AB 與桿 BD 於 B 點以鉸接方式聯結，且桿 EC 於 C 點、E 點分別與桿 BD 及桿 EG 鉸接。今載重 $6P$ 如圖 1 所示施加於 F 點，試求支承 A、支承 D、支承 G 之反力 A_x 、 A_y 、 D_x 、 D_y 、 G_y 之大小及方向。(25 分)



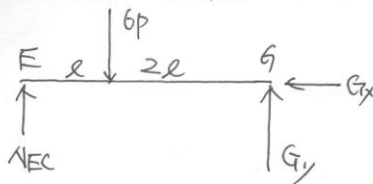
(圖 1)

試題評析 基本平面剛體平衡問題。

考點命中 《高點建國突破靜力學》p2-87 範例 40

解：

1) 取 EG 桿分析：⇒ 其中 EC 桿為二力桿件：



$$\because \sum F_x = 0 \Rightarrow G_x = 0$$

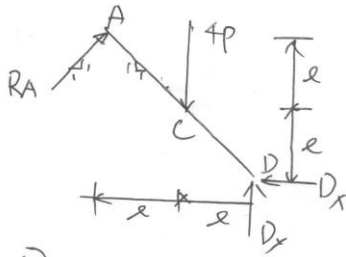
$$\because \sum M_E = 0 \Rightarrow G_y = 2P \quad (\uparrow)$$

$$\because \sum F_y = 0 \Rightarrow N_{EC} = 4P \quad (\uparrow)$$

2) 取 BCD 桿分析：

∵ AB 桿為二力桿件。∴ R_A (左)

【版權所有，翻印必究】



$$\therefore \sum M_D = 0, \text{ (2)}$$

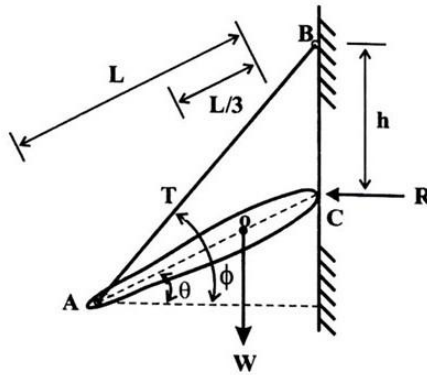
$$\therefore R_A(2e) - 4P(e) = 0$$

$$\therefore R_A = 2P$$

$$\therefore A_x = P(\rightarrow), A_y = P(\uparrow)$$

$$\therefore D_x = P(\leftarrow), D_y = 3P(\uparrow)$$

- 二、圖 2 顯示一傾斜桿 AC，以纜索 AB 及垂直牆面支撐而呈現靜態平衡。已知桿 AC 長度 L 為 6 m，牆面 B 點與 C 點之間距 h 為 2 m；由於桿 AC 不均勻，桿件重量 W 之重心位置 O 位於由 C 點往左 $L/3$ 處。假設牆面與桿 AC 間沒有摩擦力，試求牆面反力 R 、纜索 AB 張力 T 、桿 AC 傾斜角 θ 、纜索 AB 傾斜角 ϕ 。(提示：「角度」可用三角函數表示，不用實際算出角度，如：角度 $\theta = 30^\circ$ ，可用 $\sin(\theta) = 1/2$ 或 $\theta = \sin^{-1}(1/2)$ 表示，不用算出 $\theta = 30^\circ$ 。)(25 分)



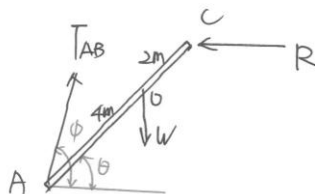
(圖 2)

試題評析 因為要找幾何關係，故屬於中等難度的題型。

考點命中 《高點建國突破靜力學》p2-49 範例 24。

解：

(1). 取 AC 桿分析：



$$\therefore \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AB} \cos \phi = R$$

$$\therefore \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB} \sin \phi = W$$

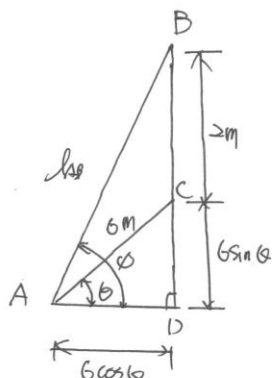
$$\therefore \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{W}{R} \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{又} \therefore \sum M_A = 0$$

$$\therefore R(6) \sin \theta = W(4) \cos \theta$$

$$\therefore \frac{3 \sin \theta}{2 \cos \theta} = \frac{W}{R} \quad \text{--- (2)}$$

(2)



$$\therefore l_{AB} \cos \phi = 6 \cos \theta$$

$$l_{AB} \sin \phi = 2 + 6 \sin \theta$$

$$\therefore \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{2 + 6 \sin \theta}{6 \cos \theta} \quad \text{--- (3)}$$

$\therefore$ 由 (1), (2), (3) 式得

$$\Rightarrow \frac{3 \sin \theta}{2 \cos \theta} = \frac{2 + 6 \sin \theta}{6 \cos \theta}$$

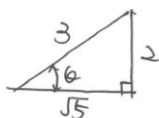
$$\Rightarrow 9 \sin \theta = 2 + 6 \sin \theta$$

$$3 \sin \theta = 2$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

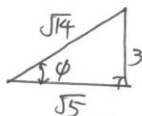
$$\therefore \frac{3}{2} \tan \theta = \frac{W}{R}$$



$$\therefore \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{W}{R}$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{5}}{3} W \quad (\leftarrow)$$

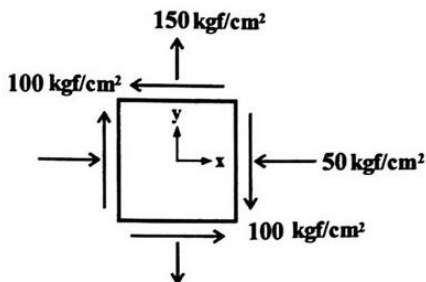
$$\therefore \tan \phi = \frac{W}{R} = \frac{W}{\frac{\sqrt{5}}{3} W} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$



$$\therefore T_{AB} = \frac{W}{\sin \phi} = \frac{W}{\frac{3}{\sqrt{4}}} = \frac{\sqrt{4}}{3} W$$

$$\therefore \phi = \sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{4}}\right)$$

三、圖 3 顯示一平面應力元素受力狀態。試求主應力與主平面、最大剪應力及其所在平面，並請繪製相應之應力元素圖明確表示。(25 分)



(圖 3)

試題評析	入門級考題，求主應力、最大剪應力及相對應平面(角度)，並進而繪出應力元素圖，上課已經教過N遍了，細心點即可輕鬆得分。
考點命中	《高點建國材料力學》第二回，例題6.2.1、6.2.2。 《國考材料力學精解》，例題6.2.1、6.2.4。

解：

【版權所有，翻印必究】

1. 寫出正向應力 σ_x 、 σ_y 及剪應力 τ_{xy} 值

採用拉逆為正符號系統，此時 $\sigma_x = -50 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\sigma_y = 150 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\tau_{xy} = -100 \text{ kgf/cm}^2$ 。

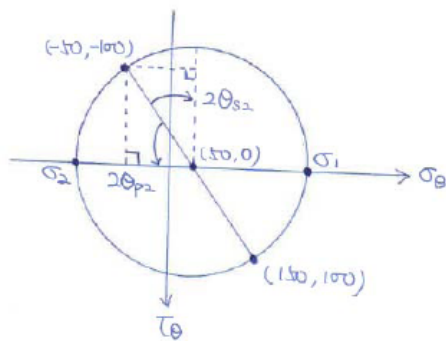
2. 繪出應力莫爾圓

(1) 將 $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (-50, -100)$ 及 $(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (150, 100)$ 標示於莫爾圓上。

(2) 莫爾圓圓心及半徑計算如下

$$\text{圓心 } (\sigma_{\text{avg}}, 0) = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) = \left(\frac{-50 + 150}{2}, 0 \right) = (50, 0)$$

$$\text{半徑 } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-50 - 150}{2} \right)^2 + (-100)^2} = 100\sqrt{2}$$



3. 計算主應力值並判斷其方向

由應力莫爾圓可知最大主應力 $\sigma_1 = \text{圓心} + \text{半徑}$ ，最小主應力 $\sigma_2 = \text{圓心} - \text{半徑}$ ：

$$\text{最大主應力 } \sigma_1 = \text{圓心} + \text{半徑} = 50 + 100\sqrt{2} = 191.421 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (拉應力)}$$

【版權所有，翻印必究】

最小主應力 $\sigma_2 = \text{圓心} - \text{半徑} = 50 - 100\sqrt{2} = -91.421 \text{ kgf/cm}^2$ (壓應力)

由應力莫爾圓可得 $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (-50, -100)$ 與 σ_2 間夾角 $2\theta_{P2}$ 之幾何關係：

$$\tan 2\theta_{P2} = \frac{-100}{-50 - 50} \Rightarrow \theta_{P2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-100}{-100} \right) = 22.5^\circ (J)$$

這代表從 x 軸逆時針旋轉 22.5° 會得到最小主應力 $\sigma_2 = -91.421 \text{ kgf/cm}^2$ ；由於兩主軸在平面座標相差 90° ，因此將 θ_{P2} 加上 90° 後可得 θ_{P1} (亦可用減去 90° 計算)，故 $\theta_{P1} = \theta_{P2} + 90^\circ = 67.5^\circ$ ，這代表從 x 軸順時針旋轉 67.5° 會得到最大主應力 $\sigma_1 = 191.421 \text{ kgf/cm}^2$ 。

4. 計算最大剪應力值並判斷其方向

由應力莫爾圓可知最大剪應力 $\tau_{\max}$ 即為應力莫爾圓之半徑 R：

$$\text{最大剪應力 } \tau_{\max} = \text{莫爾圓半徑 } R = 100\sqrt{2} \text{ kgf/cm}^2$$

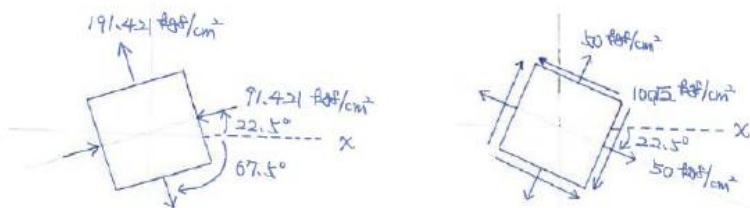
由應力莫爾圓可得 $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (-50, -100)$ 與 $\tau_{\min}$ 間夾角 $2\theta_{S2}$ 之幾何關係：

$$\tan 2\theta_{S2} = \frac{-50 - 50}{-100} \Rightarrow \theta_{S2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-100}{-100} \right) = 22.5^\circ (U)$$

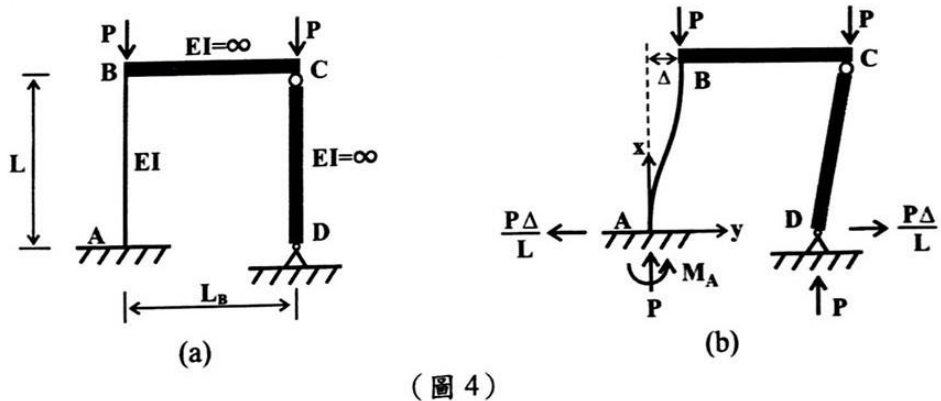
這代表從 x 軸順時針旋轉 22.5° 會得到最小剪應力 $\tau_{\min} = -100\sqrt{2} \text{ kgf/cm}^2$ ，最小剪應力所對應之正向應力為平均正向應力 $\sigma_{\text{avg}} = 50 \text{ kgf/cm}^2$ ；由於最大剪應力與最小剪應力在平面座標相差 90° ，因此將 θ_{S2} 加上 90° 後可得 θ_{S1} (亦可用減去 90° 計算)，故 $\theta_{S1} = \theta_{S2} + 90^\circ = -22.5^\circ + 90^\circ = 67.5^\circ$ ，這代表從 x 軸逆時針旋轉 67.5° 會得到最大剪應力 $\tau_{\max} = 100\sqrt{2} \text{ kgf/cm}^2$ ，最大剪應力所對應之正向應力為平均正向應力 $\sigma_{\text{avg}} = 50 \text{ kgf/cm}^2$ 。

5. 繪出相對應的應力元素圖

主應力元素圖(下圖左)及最大剪應力元素圖(下圖右)可繪出如下。



四、圖 4(a)顯示一結構，其 A 點支承為固定端、D 點為鉸支承，桿 AB 具 EI 值、桿 BC 及桿 CD 之 EI 為無限大， L_B 長度相較桿 AB 之 L 甚大，分析時可忽略桿 BC 之剪力影響。今於 B 點及 C 點分別施加垂直載重 P，圖 4(b) 為受力後之自由體圖。已知桿 AB 挫屈時之特徵方程式為 $a \times (kL) \sin(kL) + b \times \cos(kL) - 1 = 0$ (其中 $k^2 = P/EI$)，試求 a、b 數值，及桿 AB 挫屈時之有效長度係數 K_{AB} (其中 $P_{cr} = \pi^2 EI / (K_{AB} L)^2$)。計算時請使用圖 4(b) 中 A 點 xy 座標及相關力及彎矩等參數。(25 分)



試題評析	本題就是105年土木高考雙胞胎考題，只不過當年A點是鉸支承罷了。CD柱稱之「靠桿」。靠桿是指結構系統中二端為鉸接且未有適當的側向支撐之壓力桿件，當整體支撐系統有側向位移時，靠桿除了無法提供承載力外，反而因為缺乏適當的側向支撐而引致系統產生多餘的側向力，大幅降低系統的承載能力，此種現象稱為靠桿效應。
考點命中	《高點建國材料力學》第三回，例題9.2.4。 《國考材料力學精解》，例題9.2.1。

解：

國

【版權所有，翻印必究】

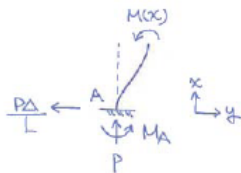
1. 給予系統一微小擾動

題目已說明 BC 及 CD 桿件之 EI 為 ∞ ，因此 BC 及 CD 桿件受力變形後會保持剛體運動。假設 BC 梁有一側向位移 Δ ，此時 D 點會有額外水平力 $P\Delta/L(\rightarrow)$ 作用，由水平方向力平衡可知 A 點亦會有側向力 $P\Delta/L(\leftarrow)$ 作用，如題目圖所示。此時柱 AB 會因額外水平力作用而使柱之有效長度係數 K 增加，推導如下。

2. 計算支承反力並計算彎矩函數 $M(x)$ ，並由梁二階微分方程式開始積分至撓度方程式

繪出柱 AB 微小擾動後之變形，座標採用第四象限。接著由固定端 A 點向上 x 距離起算，可寫出該處彎矩函數 $M(x)$ ：

$$M(x) = Py + \frac{P\Delta}{L}x - M_A$$



由梁二階微分方程式(第四象限要注意正負號規定)：

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI}\left(-Py - \frac{P\Delta}{L}x + M_A\right) \Rightarrow y'' + \frac{Py}{EI} = -\frac{P\Delta}{EIL}x + \frac{PM_A}{EIP}$$

$$\text{令 } k^2 = \frac{P}{EI} \text{ 並代入上式可得 } y'' + k^2y = -k^2\left(\frac{\Delta}{L}x - \frac{M_A}{P}\right)$$

上式為二階齊次線性微分方程式，其解為：

$$y = a\sin kx + b\cos kx - \frac{\Delta}{L}x + \frac{M_A}{P}$$

將上式微分可得：

$$y' = ak\cos kx - bk\sin kx - \frac{\Delta}{L}$$

3. 由邊界條件寫出挫屈方程式

由 AB 柱的邊界條件可寫出以下三式：

在鉸支承 A 點($x=0$)處，其撓度(位移)與撓角(轉角)為零，因此可寫出：

$$y(0) = 0 \Rightarrow b = \frac{-M_A}{P}$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow a = \frac{\Delta}{kL}$$

【版權所有，翻印必究】

在 B 點($x = L$) 處，其撓度(位移)為側向位移 Δ ，因此可寫出：

$$y(L) = \Delta \Rightarrow \frac{\Delta}{kL} \text{sink}L - \frac{M_A}{P} \text{cos}kL - \Delta + \frac{M_A}{P} = \Delta$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{2kLP\Delta - P\Delta \text{sink}L}{(kL)(1 - \text{cos}kL)}$$

在 B 點($x = L$) 處，其撓角(轉角)為零(B 點為剛接點)，因此可寫出：

$$y'(L) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{kL} k \text{cos}kL + \left[\frac{2kL\Delta - \Delta \text{sink}L}{(kL)(1 - \text{cos}kL)} \right] k \text{sink}L - \frac{\Delta}{L} = 0$$

$$\Rightarrow \text{cos}kL + \frac{(2kL - \text{sink}L)(\text{sink}L)}{(1 - \text{cos}kL)} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2kL - \text{sink}L)}{(kL)(1 - \text{cos}kL)} (kL)(\text{sink}L) + \text{cos}kL - 1 = 0$$

依據題意可寫出對應係數 a 與 b ：

$$a = \frac{(2kL - \text{sink}L)}{(kL)(1 - \text{cos}kL)}$$

$$b = 1$$

4. 解出挫屈載重 P_{cr}

此項 $\text{cos}kL + \frac{(2kL - \text{sink}L)(\text{sink}L)}{(1 - \text{cos}kL)} - 1$ 分子不得為零，整理如下：

$$\Rightarrow \text{cos}kL + \frac{(2kL - \text{sink}L)(\text{sink}L)}{(1 - \text{cos}kL)} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\text{cos}kL + 2kL \text{sink}L - 2 = 0$$

由試誤法可解 $kL = 2.33$ 。將 $kL = 2.33$ 代回 $k^2 = \frac{P}{EI}$ 可得挫屈載重 P_{cr} ：

$$\text{挫屈載重 } P_{cr} = EI k^2 = EI \left(\frac{2.33}{L} \right)^2 = \frac{\pi^2 EI}{(1.348L)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(K_{AB}L)^2}, \text{ 因此 } \underline{K_{AB} = 1.348}。$$



【版權所有，翻印必究】