

《統計學》

一、下表為102年度各縣市之自有財源占歲出比與人事費占自有財源比的資料。(桃園於103年12月25日後升格改制為直轄市)

類別	縣市別	自有財源占歲出比(%)	人事費占自有財源比(%)
直轄市	新北市	76	59.89
	臺北市	79	59.67
	桃園市	81	73.80
	臺中市	73	61.55
	臺南市	65	70.10
	高雄市	70	75.73
市	基隆市	55	101.83
	新竹市	75	71.76
	嘉義市	57	95.41
縣	宜蘭縣	56	98.61
	新竹縣	66	84.94
	苗栗縣	42	113.48
	彰化縣	51	121.02
	南投縣	53	109.54
	雲林縣	48	120.77
	嘉義縣	38	140.21
	屏東縣	41	152.01
	臺東縣	37	160.36
	花蓮縣	45	124.21
	離島	澎湖縣	27
金門縣		94	33.81
連江縣		21	141.96

假設各縣市之自有財源占歲出比與人事費占自有財源比皆服從常態分配，請回答以下問題：

- (一)在顯著水準為0.05下，檢定自有財源占歲出比與人事費占自有財源比的母體平均數是否相等。(8分)
- (二)若以自有財源占歲出比為解釋變數，人事費占自有財源比為反應變數，依此建立一簡單線性迴歸模型，請以最小平方估計法，計算此迴歸模型之截距與斜率。(10分)
- (三)將各縣市分為「直轄市」、「市」、「縣」及「離島」等四類(如表格中之「類別」一欄所示)，且假設各類別下各縣市之人事費占自有財源比皆服從常態分配。在顯著水準為0.05下，請以單因子變異數分析檢定各類別之人事費占自有財源比的母體平均數是否都相等。(12分)

試題評析

本題橫跨三個章節，包括母體平均數檢定、簡迴歸分析與變異數分析，都屬於基本計算題，但因為資料筆數多，考驗考生按計算機的速度。

考點命中

《高點·高上統計學講義》第五回與第六回，趙治勳編撰。

答：

(一)令X,Y分別表自有財源占歲出比與人事費占自有財源比

設 $D_i = X_i - Y_i$ 假設隨機樣本

母體： $D \sim (\mu_D, \sigma_D^2)$ 其中 $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$

樣本： $D_1, D_2, \dots, D_{22} \stackrel{iid}{\sim} (\mu_D, \sigma_D^2)$

點估計： $\bar{D} \sim N(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{22})$

$H_0: \mu_D = 0$ vs $H_1: \mu_D \neq 0$

T.S.: $T = \frac{\bar{D} - 0}{\frac{S_D}{\sqrt{22}}} \sim t_{(21)}$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha = 0.05$ if $|T^*| > t_{0.025(21)} = 2.08$

$\therefore T^* = \frac{-42.393 - 0}{51.378 / \sqrt{22}} = -3.87 \quad \therefore \text{reject } H_0$

我們有足夠證據去推論自有財源占歲出比與人事費占自有財源比的平均數不相等。

(二)假設 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, 22$

$$SS_X = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} = 78426 - \frac{(1250)^2}{22} = 7403.273$$

$$SS_Y = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} = 240444.428 - \frac{(2182.64)^2}{22} = 23902.729$$

$$SS_{XY} = \sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{22} = 111950.02 - \frac{1250 \times 2182.64}{22} = -12063.616$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = -1.629, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 191.768$$

(三)

直轄市	59.89	59.67	73.80	61.55	70.10	75.73			
市	101.83	71.76	95.41						
縣	98.61	84.94	113.48	121.02	109.54	120.77	140.21	152.01	160.36
	124.21								
離島	111.98	33.81	141.96						
ANOVA TABLE									

source	SS	d.f.	MS	F
品牌	12043.332	3	4014.444	$F^* = 6.0931$
Error	11859.397	18	658.855	
Total	23902.729	21		

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ vs $H_1: \text{至少一個 } \mu_i \neq \mu_j$

T.S.: $F = \frac{MSR}{MSE} \sim F_{(3,18)}$

R.R. : Reject H_0 at $\alpha = 0.05$ if $F^* > F_{0.05(3,18)} = 3.160$

$\therefore F^* = 6.0931 \quad \therefore \text{reject } H_0$

我們有足夠的統計證據去推論各縣市之人事費占自有財源比是有差異的。

二、某大企業集團有 A、B、C 三個事業群，事業群 A 下置有四個單位執行長，事業群 B 下有三個執行長，事業群 C 下有兩個執行長。若集團董事會將隨機由此九個執行長選派三人至集團總管理處，令隨機變數 Y_1 與 Y_2 分別代表事業群 A 和事業群 B 會被選派到的人數：

(一)請寫出 Y_1 與 Y_2 的聯合機率分配函數。(5 分)

(二) Y_1 的邊際機率分配函數。(10 分)

(三) Y_1 與 Y_2 是否為互相獨立？請詳述理由。(10 分)

試題評析 本題是考三項分配，但近幾年這個機率分配的出題率很高，考生應該有所準備。

考點命中 《高點·高上統計學講義》第三回，趙治勳編撰，第八章 8.2 節。

答：

題目所謂之「機率分配函數」，應該是指機率函數 p.f. 而非累積分配函數 c.d.f.

(一) $(Y_1, Y_2) \sim \text{Hyper}(N = 9, m_1 = 4, m_2 = 3, n = 3)$

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \frac{\binom{4}{y_1} \binom{3}{y_2} \binom{2}{3 - y_1 - y_2}}{\binom{9}{3}}$$

$$y_1 = 0, 1, 2, 3, \quad y_2 = 0, 1, 2, 3, \quad 0 \leq y_1 + y_2 \leq 3, \quad y_1, y_2 \text{ 不能同時為 } 0$$

(二) $Y_1 \sim \text{Hyper}(N = 9, m_1 = 4, n = 3)$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{\binom{4}{y_1} \binom{5}{3 - y_1}}{\binom{9}{3}}, \quad y_1 = 0, 1, 2, 3$$

(三) Y_1, Y_2 並非相互獨立

因為 $0 \leq y_1 + y_2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq y_2 \leq 3 - y_1$, 可見 Y_1, Y_2 存在負線性相關，如此它們必不獨立。

三、若 Y 之機率密度函數如下：

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\phi(y)}{\Phi(b) - \Phi(a)} & a < y < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\phi(y)$ 與 $\Phi(y)$ 分別為標準常態分配的機率密度函數與分配函數。請推導求得 Y 的期望值

$$E(Y) = \frac{\phi(a) - \phi(b)}{\Phi(b) - \Phi(a)} \quad (13 \text{ 分})$$

試題評析 本題實際上是考微積分，但只是用到變數變換這一個積分技巧而已。

答：

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int_a^b y \frac{\phi(y)}{\Phi(b) - \Phi(a)} dy = \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \int_a^b y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b y e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad \text{令 } u = y^2 \Rightarrow \frac{1}{2} du = y dy \\
 &= \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_a^{b^2} e^{-\frac{u}{2}} du = \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} (-2) e^{-\frac{u}{2}} \Big|_a^{b^2} \\
 &= \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}] = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}}}{\Phi(b) - \Phi(a)} = \frac{\phi(a) - \phi(b)}{\Phi(b) - \Phi(a)} \quad \text{得證}
 \end{aligned}$$

四、下表為今年度高考三級錄取人數最多的前5類的到考人數與錄取人數，包括土木工程、財稅行政、人事行政、會計及一般行政。

類科	到考人數	錄取人數
土木工程	1691	436
財稅行政	2382	208
人事行政	2840	204
會計	1542	180
一般行政	3171	170

在顯著水準為0.05下，請檢定「類科」和「錄取與否」是否有關。(12分)

試題評析	本題是考卡方適合度檢，歷年考古題中考過，要拿到滿分並不難。
考點命中	《高點·高上統計學講義》第六回，趙治勳編撰，第十四章。

答：

O_{ij} / E_{ij}	到考人數	錄取人數	
土木工程	1691 / 1928.299	436 / 198.701	2127
財稅行政	2382 / 2348.046	208 / 241.954	2590
人事行政	2840 / 2759.634	204 / 284.366	3044
會計	1542 / 1561.133	180 / 160.867	1722
一般行政	3171 / 3028.888	170 / 312.112	3341
	11626	1198	12824

H_0 : 類科與錄取與否獨立 vs H_1 : 類科與錄取與否相依

T.S. : $\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^2 \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi_{((5-1)(2-1)=4)}^2$ 【版權所有，重製必究！】

R.R. : Reject H_0 at $\alpha = 0.05$ if $\chi^{2*} > \chi_{0.05(4)}^2 = 9.488$

$\therefore \chi^{2*} = 416.791 \quad \therefore \text{reject } H_0$

我們有足夠證據去推論類科與錄取與否相依。

五、若有兩組獨立隨機樣本，分別以 $\{Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1}\}$ 與 $\{Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2n_2}\}$ 表示之，此兩組樣本各抽自具不同母體平均數的常態分配，但有相同的母體變異數 σ^2 。令 \bar{Y}_1 與 \bar{Y}_2 為第一、二組資料的樣本平均數， s_1^2 與 s_2^2 分別為其樣本變異數，定義如下：

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{n_i - 1} \quad i=1,2$$

請回答以下問題：

(一)若 $s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ ，則 s_p^2 是否為 σ^2 的不偏估計？請詳述理由。(10分)

(二)計算求得 s_p^2 的變異數。(10分)

試題評析 本題是考樣本變異數之抽樣分配，上課時也有為同學講解過一樣的題目，要拿到滿分並不難。

考點命中 《高點·高上統計學講義》第四回，趙治勳編撰，第十章。

答：

$$\text{已知 } \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n_1 - 1)}^2 \perp \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n_2 - 1)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{(一)} E(S_p^2) &= E\left(\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right) = \frac{\sigma^2 E\left[\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2}\right] + \sigma^2 E\left[\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}\right]}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{\sigma^2(n_1 - 1) + \sigma^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2 - 2} \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

$\therefore S_p^2$ 為 σ^2 之不偏估計量

$$\begin{aligned} \text{(二)} V(S_p^2) &= V\left(\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right) = \frac{\sigma^4 V\left[\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2}\right] + \sigma^4 V\left[\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}\right]}{[n_1 + n_2 - 2]^2} \\ &= \frac{\sigma^4 2(n_1 - 1) + \sigma^4 2(n_2 - 1)}{[n_1 + n_2 - 2]^2} = \frac{n_1 + n_2 - 2}{[n_1 + n_2 - 2]^2} 2\sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{n_1 + n_2 - 2} \end{aligned}$$

【版權所有，重製必究！】

t-table (right tail)

For each row (degrees of freedom k) and column (right tail probability α), the table entry e satisfies $\Pr(t_k \geq e) = \alpha$. Note that the t -distribution is symmetric about 0.

degrees of freedom	right tail probability				
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457
35	0.682	1.306	1.690	2.030	2.438
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423
45	0.680	1.301	1.679	2.014	2.412
50	0.679	1.299	1.676	2.009	2.403
gaussian	0.675	1.282	1.646	1.962	2.330

χ^2 分配表

df	Area in Right Tail of Distribution									
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672

【版權所有，重製必究！】

F - Distribution ($\alpha = 0.05$ in the Right Tail)

df ₂ \ df ₁	Numerator Degrees of Freedom								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123
4	7.7086	9.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	6.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

【版權所有，重製必究！】