《統計學》

試題評析	今年的試題都是基本的計算題，比較不容易測出考生程度，中上程度的考生應該可以拿到80分，就本科目而言，要上榜就比細心度了。

一、假設$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，隨機抽取一樣本，樣本大小為n。

若已知σ^2值，在顯著水準為0.05下，檢定H_0：$\mu=\mu_0$ vs. H1：$\mu\neq\mu_0$

(一)檢定統計量及其分配為何？（5分）

(二)在H_0為真下，檢定統計量分配上的拒絕區臨界點為何？（5分）

(三)已知檢定結果拒絕H_0，若事實上$\mu=\mu_0+\sigma$，取樣本大小n＝9，則檢定力$(1-\beta)$為何？（10分）

(四)續題(三)，若(三)中之n未知，欲使$(1-\beta)\geq 0.9$，則n至少應為多少？（10分）

（Hint：試n＝10, 11, 12,...）

考點命中	《高點統計學講義第五回》，秦大成編撰，頁18例題3。

答：

(一)統計量 $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(二) $Z_{\frac{0.05}{2}}=1.96$

(三) $C=\left\{\bar{X}\,\middle|\,\begin{matrix}\bar{X}>\mu_0+Z_{\frac{0.05}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{9}}=\mu_0+\frac{1.96}{3}\sigma \\ \text{或} \\ \bar{X}<\mu_0-Z_{\frac{0.05}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{9}}=\mu_0-\frac{1.96}{3}\sigma\end{matrix}\right\}$

$$\text{power}=P\left(\bar{X}>\mu_0+\frac{1.96}{3}\sigma\ \text{或}\ \bar{X}<\mu_0-\frac{1.96}{3}\sigma\ \middle|\ \mu=\mu_0+\sigma\in H_1\right)$$

$$=P\left(Z>\frac{\mu_0+\frac{1.96}{3}\sigma-\mu_0-\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{9}}}\ \text{或}\ Z<\frac{\mu_0-\frac{1.96}{3}\sigma-\mu_0-\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{9}}}\right)$$

$$=P(Z>-1.04\ \text{或}\ Z<-4.96)$$

$$=1-0.1492=0.8508$$

(四) $1-\text{power}=P\left(\bar{X}>\mu_0+\frac{1.96}{\sqrt{n}}\sigma\ \text{或}\ \bar{X}<\mu_0-\frac{1.96}{\sqrt{n}}\sigma\ \middle|\ \mu=\mu_0+\sigma\in H_1\right)$

$$=P\left(Z>\frac{\mu_0+\frac{1.96}{\sqrt{n}}\sigma-\mu_0-\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ \text{或}\ Z<\frac{\mu_0-\frac{1.96}{\sqrt{n}}\sigma-\mu_0-\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=P(Z>1.96-\sqrt{n}\ \text{或}\ Z<-1.96+\sqrt{n})$$

① $n=10$

$$1-\text{power}=P(Z>1.96-\sqrt{10}\ \text{或}\ Z<-1.96+\sqrt{10})$$

$= P(Z > -1.21 \text{ 或 } Z < -3.09)$

$= 0.8869 + 0.001 = 0.8879 \le 0.9$

② $n = 110$

$1 - power = P(Z > 1.96 - \sqrt{11} \text{ 或 } Z < -1.96 + \sqrt{11})$

$= P(Z > -1.3566 \text{ 或 } Z < -5.2766)$

$\ge P(Z > -1.35) = 0.9915 \ge 0.9$

$\therefore$ 取 $n = 11$

二、一家工廠之經理認為工作人員之生產力是跟不同工作之設計有關。一個新產品之生產考慮兩種不同工作之設計，並且希望選擇其中之一。隨機抽取6位工作人員指派使用設計A。8位工作人員指派使用設計B，各工作人員之裝配時間如下（單位：小時）：

設計A： 10, 15, 20, 15, 25, 20

設計B： 15, 20, 25, 20, 25, 30, 15, 30

假設設計A、B的裝配時間服從常態分配：

(一)檢定設計A和B之裝配時間變異數是否相等（顯著水準為0.1）？（10分）

(二)依(一)的結果，說明變異數之點估計值。（5分）

(三)依(一)的結果，在顯著水準為0.05下，檢定兩種不同工作設計之平均裝配時間是否相同？（10分）

考點命中	《高點統計學講義第五回》，秦大成編撰，頁46例題3。

答：

$\bar{X}_A = 17.5,\ \bar{X}_B = 22.5,\ S_A^2 = 27.5,\ S_B^2 = 35.7143$

（一）① $\begin{cases} H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1: \sigma_A^2 \ne \sigma_B^2 \end{cases}$

② $C = \{F \mid F > F_{\frac{0.05}{2}}(6-1,\ 8-1) = 5.285$

或 $F < F_{1-\frac{0.05}{2}}(6-1,\ 8-1) = \frac{1}{6.8531} = 0.146\}$

③ $F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = 0.77 \notin C$

$\therefore$ Do not reject H_0, $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$

（二）$S_p^2 = \frac{(n_A-1)S_A^2 + (n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2} = \frac{(6-1)\times 27.5 + (8-1)\times 35.7143}{(6+8)-2} = 32.29$

（三）① $\begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_B \\ H_1: \mu_A \ne \mu_B \end{cases}$

② $C=\left\{T \,\middle|\, |T|>t_{\frac{0.05}{2}}(6+8-2)=2.1788\right\}$

③ $|T|=\left|\dfrac{\bar{X}_A-\bar{X}_B}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)}}\right|=\left|\dfrac{17.5-22.5}{\sqrt{32.29\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)}}\right|=1.629\notin C$

$\therefore$ Do not reject H_0，兩種不同工作設計之平均裝配時間相等

三、研發工程師研究溫度和壓力是否影響化學產品的壽命。在指定的溫度和壓力的水準組合下，實驗各反覆執行2次，且所有實驗的順序是隨機的。
實驗收集之數據，如表所示。（化學產品壽命之單位：小時）

溫度＼壓力	230	330	Total
20	5, 3	5, 0	13
35	10, 8	8, 4	30
Total	26	17	43

(一)此實驗設計之名稱為何？（5分）
(二)壓力的主要效用（main effect）之估計值為何？（10分）
(三)已知溫度和壓力交互作用不存在，列出變異數分析表並檢定溫度是否顯著（顯著水準為0.05）？（10分）

考點命中	《高點統計學講義第六回》，秦大成編撰，頁71例題5。

答：
(一)二因子重複試驗設計
(二)

溫度＼壓力	230	330	個數	列和
20	$T_{11\cdot}=8$	$T_{12\cdot}=5$	4	$T_{1\cdot\cdot}=13$
35	$T_{21\cdot}=18$	$T_{22\cdot}=12$	4	$T_{2\cdot\cdot}=30$
個數	4	4	N=8	
行和	$T_{\cdot1\cdot}=26$	$T_{\cdot2\cdot}=17$		$T_{\cdot\cdot\cdot}=43$

壓力主效果

$=\bar{X}_{\cdot1\cdot}-\bar{X}_{\cdot2\cdot}=\frac{26}{4}-\frac{17}{4}=2.25$

(三) $SSTO=(5^2+3^2+\cdots+4^2)-\frac{43^2}{8}=71.875$

$SSR=\frac{1}{4}(13^2+30^2)-\frac{43^2}{8}=36.125$

$SSC=\frac{1}{4}(26^2+17^2)-\frac{43^2}{8}=10.125$

$SSE=(5^2+3^2+\cdots+4^2)-\frac{1}{2}(8^2+5^2+18^2+12^2)=24.5$

$SSI=SSTO-SSR-SSC-SSE=1.125$

(1) ANOVA table

來源	SS	df	MS	F
溫度	36.125	1	36.125	$F_R=5.9$
壓力	10.125	1	10.125	$F_C=1.65$
交互作用	1.125	1	1.125	$F_I=0.1837$
誤差	24.5	4	6.125	
總和	71.875	7		

(2) 本題：交互作用不顯著，檢定因子主效果是否顯著時，可以不考慮SSI

① $\begin{cases} H_0: \text{溫度主效果不顯著} \\ H_1: \text{溫度主效果顯著} \end{cases}$

② $C=\{F \mid F>F_{0.05}(1,\ 1+4)=6.6079\}$

③ $F=\dfrac{SSR/(r-1)}{(SSE+SSI)/[rc(n-1)+(r-1)(c-1)]}=\dfrac{36.125/1}{(1.125+24.5)/(1+4)}=7.049\in C$

$\therefore$ reject H_0，溫度主效果顯著

四、假設X, Y的聯合機率密度函數為

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} d, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（每小題5分，共20分）

(一)計算d值。

(二)X的邊際機率密度函數為何？

(三)計算XY的期望值，即E(XY)。

(四)計算Y的變異數，即V(Y)。

考點命中	《高點統計學講義第二回》，秦大成編撰，頁100例題1。

答：

(一) $\int_0^2 \int_0^2 d \ dydx = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{4}$

(二) $f(x) = \int_0^2 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{2}$，$0 \leq x \leq 2$

(三) $EXY = \int_0^2 \int_0^2 (xy) \frac{1}{4} dydx = 1$

(四) $f(y) = \int_0^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2}$，$0 \leq y \leq 2$

$V(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}$