

《統計學概要》

試題評析	今年考題著重在基礎計算，考題呈現明確，不會產生看不懂題目的情況，考題難度不高，考生較有問題應該是第二大題，要注意的還有第三大題的畫圖及第五大題的假設。以普考來說，本卷難度適中，基本分應該要有80分。
考點命中	第一題：《高點統計學講義第一回》，趙治勳老師編撰，第二章2.4節。 第二題：《高點統計學講義第一回》，趙治勳老師編撰，第三章3.4節。 第三題：《高點統計學講義第一回》，趙治勳老師編撰，頁40，例題。 第四題：(一)(二)(三)：《高點統計學講義第一回》，趙治勳老師編撰，頁36。 (四)：《高點統計學講義第一回》，趙治勳老師編撰，頁46。 第五題：(一)《迴歸分析熱門題庫》，趙治勳老師編著，高點出版，頁2-21。 (二)《迴歸分析熱門題庫》，趙治勳老師編著，高點出版，頁2-16。 (三)《迴歸分析熱門題庫》，趙治勳老師編著，高點出版，頁2-21。

一、某一鄉公所招考清潔隊員，考生被要求參加一項體能測驗。20個考生的測驗成績（以分鐘計）如下所列：

25 27 30 33 30 32 30 34 30 27
 26 25 29 31 31 32 34 32 33 30

- (一)求平均數。(5分)
 (二)求中位數。(5分)
 (三)求眾數。(5分)
 (四)求標準差。(5分)

答：

(一) $\mu = 30.05$ (分鐘)

(二)資料由小至大排列：

25 25 26 27 28 29 30 30 30 30 30 30 31 31 32 32 32 33 33 34 34

中位數 $M_d = 30$ (分鐘)

(三)眾數 $M_o = 30$ (分鐘)

(四) $\sigma = 2.729$ (分鐘)

二、某家醫院接受的流感疫苗有 $\frac{3}{5}$ 來自公司甲和 $\frac{2}{5}$ 來自公司乙。每批流感疫苗有許多瓶針劑。來自公司甲的疫苗針劑有2%是無效的，而公司乙的有3%無效。這家醫院從送來的一批流感疫苗中檢驗了25瓶隨機選取的針劑並且發現2瓶是無效的。則該批疫苗是來自公司乙的條件機率為何？(10分)

答：

令甲、乙分別表來自甲公司、乙公司的疫苗

A表檢驗的25瓶針劑中有2瓶是無效

$$P(\text{甲}) = \frac{3}{5}, P(\text{乙}) = \frac{2}{5},$$

【版權所有，重製必究！】

$$P(A|\text{甲}) = \binom{25}{2} (0.02)^2 (0.98)^{23} = 0.0754, \quad P(A|\text{乙}) = \binom{25}{2} (0.03)^2 (0.97)^{23} = 0.134$$

$$P(\text{乙}|A) = \frac{\frac{2}{5}(0.134)}{\frac{3}{5}(0.0754) + \frac{2}{5}(0.134)} = 0.5423$$

三、令 X 為一個混合隨機變數具有分配函數

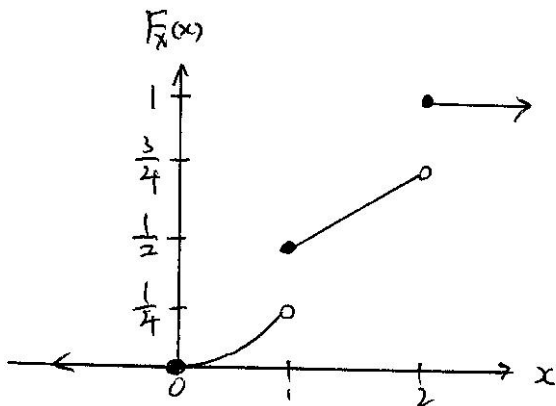
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{(x+1)}{4} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , 2 \leq x \end{cases}$$

(一) 小心地描繪出 $F(x)$ 的圖形。(10分)

(二) 求 X 的平均數。(10分)

答：

(一)



(二)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1, 2 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$E(X) = (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 x \frac{x}{2} dx + \int_1^2 x \frac{1}{4} dx = \frac{49}{24}$$

四、假設王先生的牧場飼養了一群乳牛，每頭乳牛一年所生產的乳脂重量為隨機變數 X （以公斤為單位）具有常態分配 $N(\mu, \sigma^2)$ 。他記錄了其中10頭乳牛在去年一年的乳脂產量如下：

480 520 490 540 500 470 530 480 510 480

(一) 計算 μ 的一個估計值。(5分)

(二) 計算 σ 的一個估計值。(5分)

(三) 求 μ 的一個90%信賴區間。(10分)

(四) 求 σ 的一個90%信賴區間。(10分)

註：

(1) 自由度9的 t 分配的第95個百分位數為 $t_{0.05}(9) = 1.833$

(2) 自由度9的卡方分配的第5個百分位數為 $\chi_{0.95}^2(9) = 3.325$ 且第95個百分位數為 $\chi_{0.05}^2(9) = 16.92$

答：

(一) $\bar{x} = 500$ (公斤)

(二) $s = 24.037$ (公斤)

(三) 母體： $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 假設隨機樣本

樣本： $X_1, X_2, \dots, X_{10} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

點估計： $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{10})$

樞紐量： $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{10}} \sim t_{(9)}$

機率區間： $P(-t_{0.05(9)} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{10}} \leq t_{0.05(9)}) = 0.9$

信賴區間： $P(\bar{X} - t_{0.05(9)} \frac{S}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.05(9)} \frac{S}{\sqrt{10}}) = 0.9$

結論： μ 之90%信賴區間

$$(\bar{X} \mp t_{0.05(9)} \frac{S}{\sqrt{10}}) = (500 \mp 1.833 \frac{24.037}{\sqrt{10}}) = (486.067, 513.933)$$

(四) 母體： $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 假設隨機樣本

樣本： $X_1, X_2, \dots, X_{10} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

點估計： $S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{10-1}$

樞紐量： $\frac{(10-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(9)}^2$

機率區間： $P(\chi_{0.95(9)}^2 \leq \frac{(10-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{0.05(9)}^2) = 0.9$

【版權所有，重製必究！】

$$\text{信賴區間: } P\left(\sqrt{\frac{(10-1)S^2}{\chi_{0.05(9)}^2}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(10-1)S^2}{\chi_{0.95(9)}^2}}\right) = 0.9$$

結論： σ 之 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間

$$\left(\sqrt{\frac{(10-1)S^2}{\chi_{0.05(9)}^2}}, \sqrt{\frac{(10-1)S^2}{\chi_{0.95(9)}^2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{(10-1)24.037^2}{16.92}}, \sqrt{\frac{(10-1)24.037^2}{3.325}}\right) \\ = (17.531, 39.546)$$

五、利用下列已由MINITAB統計軟體執行某線性迴歸分析個案所得變異數分析(ANOVA)表回答下列問題：

線性迴歸ANOVA表

變異來源	自由度(df)	平方和(SS)	平均平方和(MS)	F 比值	p-值
迴歸	1	191601	191601	22.59	0.001
殘差	10	84834	8483		
總和	11	276435			

(一)此線性迴歸模型的判定係數 R^2 為何？(5分)

(二)此線性迴歸模型的估計標準差為 S_ε 為何？(5分)

(三)在檢定水準 $\alpha=0.05$ 下，此線性迴歸模型是顯著的嗎？(須說明理由) (10分)

答：

$$(一) R^2 = \frac{191601}{276435} = 0.6931$$

$$(二) S_\varepsilon = \sqrt{MSE} = \sqrt{8483} = 92.1032$$

(三) 設迴歸模型: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, 12$

H_0 : 模型是不適當的 vs H_1 : 模型是適當的

$$\text{T.S.: } F = \frac{MSR}{MSE} \sim F_{(1,10)}$$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha=0.05$ if $\alpha > p\text{-value}$

$$\because p\text{-value} = 0.001 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

結論: 我們有足夠證據去推論模型是顯著的

【版權所有，重製必究！】