《材料力學概要》

一、如圖 1 所示，有一軸力構件 AD，左端 A 處為固定端，右端 D 處受到軸力 $P = 100$ kN 向右作用。並且在 B 處受到軸力 $F_1 = 70$ kN 向左作用，在 C 處受到軸力 F_2 向右作用。已知 AB 段與 CD 段為鋼製，彈性模數 $E_{st} = 200$ GPa，AB 與 CD 段長度為 1 m，截面積為 100 mm^2；而 BC 段為鋁製，彈性模數 $E_{al} = 70$ GPa，BC 段長度 1 m，截面積是 200 mm^2。在 BC 段有一應變規量測軸向應變 $\varepsilon = 10\,\mu$（其中 $\mu = 10^{-6}$），請問 F_2 是多少？又求 D 端位移 δ_D。（25 分）

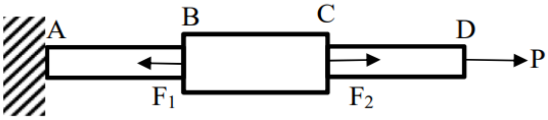


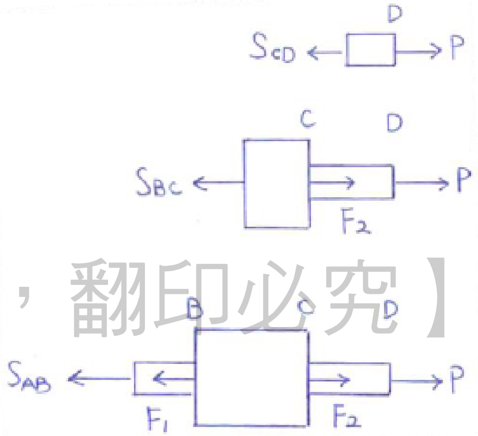
圖 1

試題評析	簡單的軸力桿件分析，由單軸虎克定理即可反算外力F2，接著再由各桿段伸縮量總和可得到D點位移值，別代錯數值一定可以得分！
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.1.8。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.1.2。

答：

1.計算各桿軸力(內力)

由水平方向力平衡可求得各桿件內力：



桿件 AB 段軸力 $S_{AB} = P + F_2 - F_1$

桿件 BC 段軸力 $S_{BC} = P + F_2$

桿件 CD 段軸力 $S_{CD} = P$

2.由 BC 段正向應變反求外力 F_2

桿件BC段軸向應力 $\sigma_{BC} = \dfrac{S_{BC}}{A_{BC}} = \dfrac{P+F_2}{A_{BC}}$

桿件BC段正向應變 $\varepsilon_{BC} = \dfrac{\sigma_{BC}}{E_{al}} \Rightarrow 10\mu = \dfrac{\left(\dfrac{100\times10^3+F_2}{200}\right)}{70\times10^3}$

$\Rightarrow \underline{F_2 = -99860\text{ N} = -99.86\text{ kN}(\leftarrow)}$，負值表方向與題意相反，故$F_2$實為向左

3.計算D端位移δ_D

$$\text{AB段伸縮量}\delta_{AB}=\frac{S_{AB}L_{AB}}{E_{st}A_{AB}}=\frac{(100-99.86-70)\times10^3\times(1\times10^3)}{(200\times10^3)(100)}=-3.493\text{ mm}$$

$$\text{BC段伸縮量}\delta_{BC}=\frac{S_{BC}L_{BC}}{E_{al}A_{BC}}=\frac{(100-99.86)\times10^3\times(1\times10^3)}{(70\times10^3)(200)}=0.010\text{ mm}$$

$$\text{CD段伸縮量}\delta_{CD}=\frac{S_{CD}L_{CD}}{E_{st}A_{CD}}=\frac{(100\times10^3)(1\times10^3)}{(200\times10^3)(100)}=5\text{ mm}$$

$$\text{D點位移}\delta_D=(\text{不動A點}\delta_A=0)+\delta_{AB}+\delta_{BC}+\delta_{CD}=0-3.493+0.010+5=\underline{1.517\text{ mm}(\rightarrow)}$$

二、如圖 2 所示，有一簡支梁 AB，在梁上受到一分布載重 $w(x)=-x^2+xL$ 作用。試求出梁的中央處 C 處的側向位移 v_C。已知梁的彈性模數 $E=200$ GPa，梁的截面為矩形斷面，高度 h 為 60 cm，寬度為 50 cm，梁的長度 $L=10$ m。本題可能用到積分公式 $\int x^m dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}$。（25 分）

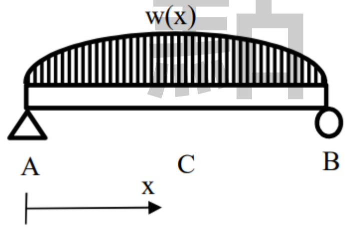


圖 2

試題評析	題目未給分布載重方向故可自由假設(一般都是向下居多)；本題從四階微分方程式開始起手做上來很簡單，考場上不要粗心即可。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.1.9。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.1.11。

答：

1.計算載重函數 w(x)，並由梁四階微分方程式開始積分至撓度方程式

本題未給分布載重方向故假設向「下」，另座標系統選行採用第一象限進行運算。特別注意在第一象限中載重函數 w(x)以**向上(載重箭頭)為正、向下(載重箭頭)為負**，本題在第一象限令載重函數 w(x)箭頭向下，因此載重函數 w(x)需自**行手動加個負號**：

$$w(x)=x^2-xL$$

$$y''''=\frac{w(x)}{EI}=\frac{x^2-xL}{EI}$$

$$y'''=(\frac{1}{EI})(\frac{x^3}{3}-\frac{Lx^2}{2}+C_1)$$

$$y''=(\frac{1}{EI})(\frac{x^4}{12}-\frac{Lx^3}{6}+C_1x+C_2)$$

$$y'=(\frac{1}{EI})(\frac{x^5}{60}-\frac{Lx^4}{24}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3)$$

$$y=(\frac{1}{EI})(\frac{x^6}{360}-\frac{Lx^5}{120}+\frac{C_1x^3}{6}+\frac{C_2x^2}{2}+C_3x+C_4)$$

2.由梁邊界條件解出待定常數C_1、C_2、C_3及C_4

在 A 點鉸支承$(x=0)$處，其撓度(位移)為零因此可寫出：

$$\Rightarrow \Delta_A=0\Rightarrow y(x=0)=0\Rightarrow C_4=0$$

在 A 點鉸支承$(x=0)$處，其彎矩值為零可寫出：

$$\Rightarrow M_A=0\Rightarrow y''(x=0)=0\Rightarrow C_2=0$$

在 B 點滾支承$(x=L)$處，其彎矩值為零可寫出：

$$\Rightarrow M_B=0\Rightarrow y''(x=L)=0\Rightarrow (\frac{1}{EI})(\frac{L^4}{12}-\frac{L^4}{6}+C_1L)=0\Rightarrow C_1=\frac{L^3}{12}$$

在B點滾支承$(x=L)$處，其撓度(位移)為零因此可寫出：

$$\Rightarrow \Delta_B = 0 \Rightarrow y(x=L) = 0 \Rightarrow (\frac{1}{EI})(\frac{L^6}{360} - \frac{L^6}{120} - \frac{L^3}{6}\times\frac{L^3}{12} + C_3 L) = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{-L^5}{120}$$

3.計算梁中央處C處的側向位移v_C

題目未給分布載重$w(x)$的單位，假設其單位為N/m，因此側向位移v_C值為：

$$v_C = y(x=\frac{L}{2}=5\text{ m}) = \frac{1}{(200\times10^9)(\frac{0.5\times0.6^3}{12})}(\frac{5^6}{360} - \frac{10\times5^5}{120} + \frac{5^3}{6}\times\frac{10^3}{12} - \frac{10^5}{120}\times5)$$

$\Rightarrow$ $v_C = -1.471\times10^{-6}$m (若$w(x)$向下則$v_C$向下；若$w(x)$向上則$v_C$向上)

三、某點之應力狀態如圖 3 所示。試求其主軸應力（principle stress），和最大剪應力（maximum shear stress）及平均正應力。（25 分）

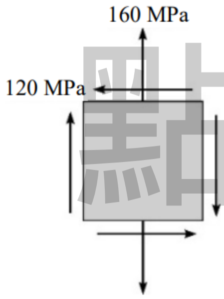


圖 3

試題評析	由應力莫爾圓觀念可以快速得到答案，這是完完全全的送分題。。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題6.2.1。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題6.2.3。

答：

1.寫出正向應力σ_x、σ_y及剪應力τ_{xy}值

採用**拉逆為正**符號系統，$\sigma_x = 0$ MPa、$\sigma_y = 160$ MPa、$\tau_{xy} = -120$ MPa。

2.由應力莫爾圓觀念求主應力與最大剪應力

莫爾圓圓心及半徑計算如下：

$$圓心(\sigma_{avg},0) = (\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}，0) = (\frac{0+160}{2}，0) = (80，0)$$

$$半徑\ R = \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2} = \sqrt{(\frac{0-160}{2})^2+(-120)^2} = 144.222$$

由應力莫爾圓可知最大主應力σ_1 = 圓心+半徑、最小主應力σ_2 = 圓心 − 半徑：

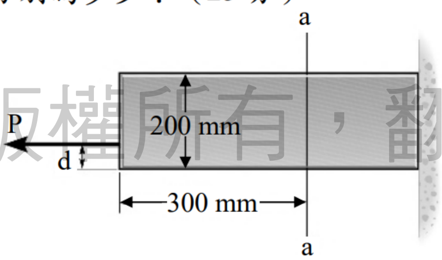
最大主應力σ_1 = 圓心+半徑 = 80+144.222 = 224.222 MPa (拉應力)

最小主應力σ_2 = 圓心 − 半徑 = 80 − 144.222 = −64.222 MPa (壓應力)

最大剪應力τ_{max} = 半徑 R = 144.222 MPa

平均正應力σ_{avg} = 圓心 x 座標值 = 80 MPa (拉應力)

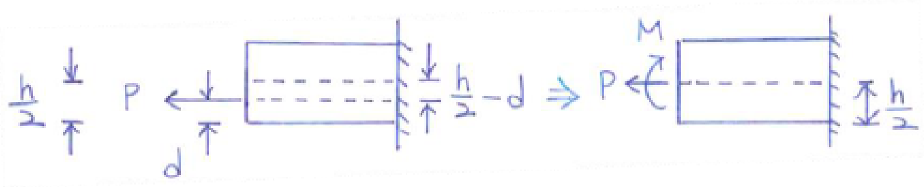
四、如圖 4 所示，一水平力 P＝100 kN 作用於板的末端上。板厚 10 mm，而 P 則作用於板厚之中心線下方，且 d＝30 mm，請問 a-a 截面的正向應力最大值與最小值分別為多少？（25 分）

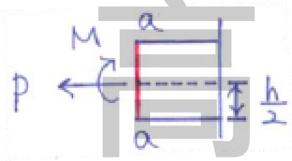


試題評析	將力量移回到斷面形心後便有軸力+彎矩效應，題目給的300mm實際上用不到。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題7.2.10。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題7.2.3。

答：

Ans:





先將斷面偏心軸力 P 移回到矩形斷面形心。令 h = 200 mm 並依據力**的平移技巧**在斷面形心除了會有軸拉力 P 之外尚會有額外彎矩$M = (P)(h/2 - d)$。接著畫出 a-a 截面上的內力，同樣是由軸拉力 P 與彎矩 M 之組合。在軸拉力 P 與正彎矩 M 的組合下，最大正向應力σ_{max}會出現在斷面最下緣處：

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{My_{max}}{I} = \frac{100\times10^3}{200\times10} + \frac{(100\times10^3)(200/2-30)(100)}{(10\times200^3/12)} = \underline{155\ \text{MPa}\ (拉應力)}$$

在軸拉力 P 與正彎矩 M 的組合下，最小正向應力σ_{min}會出現在斷面最上緣處：

$$\sigma_{min} = \frac{P}{A} - \frac{My_{max}}{I} = \frac{100\times10^3}{200\times10} - \frac{(100\times10^3)(200/2-30)(100)}{(10\times200^3/12)} = \underline{-55\ \text{MPa}\ (壓應力)}$$