

# 《統計學概要》

一、隨機樣本  $X_1, \dots, X_{25}$  來自 mean 為  $\mu$ , variance 為  $\sigma^2$  之母體。令  $\bar{X}$  為樣本平均, 試求  $P(|\bar{X} - \mu| < 2\sigma)$  之下界。(10分)

試題評析	本題屬於柴比雪夫不等式之計算題型, 最近是111年曾經考過, 也是常考範圍之一, 同學獲得滿分不難。
考點命中	《高點·高上統計學講義》第一回, 趙治勳編撰, 第一回第五章第五節, 頁109。

答:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} (\mu, \sigma^2), E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu, V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{25}$$

由柴比雪夫不等式可得

$$P(|\bar{X} - \mu| < 2\sigma) = P(|\bar{X} - \mu| < 2\sqrt{25} \frac{\sigma}{\sqrt{25}}) = P(|\bar{X} - \mu_{\bar{X}}| < 10\sigma_{\bar{X}}) \geq 1 - \frac{1}{10^2} = 0.99$$

因此,  $P(|\bar{X} - \mu| < 2\sigma)$  之下界為0.99。

二、三張卡片, 分別為: 兩面皆白、兩面皆黑、一面黑一面紅。今隨機取一張放桌上, 若朝上一面為黑, 則其背面為紅之機率?(10分)

試題評析	本題屬於貝氏定理之計算題型, 屬於常考範圍, 講義中也有類似題, 估計同學獲得滿分不難。
考點命中	《高點·高上統計學講義考題補充Q1》, 趙治勳編撰, 例3-1-5, 頁31。

答:

令 WW, BB, BR 分別表兩面皆白、兩面皆黑、一黑一紅之卡片  
C 表朝上一面為黑色

$$P(BR|C) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

三、為調查民眾對某政策的支持比例  $p$ , 隨機抽取有效樣本 1,600 人。未回答支持者, 視為不支持。

(一) 欲檢驗「虛無假說: 支持某政策的比例不低於 50%」, 則樣本中不支持該政策的人數至少要多少才能在  $\alpha = 0.05$  之顯著水準下拒絕虛無假說?(請先建立假說)(15分)

(二) 在信心水準 95% 下, 對  $p$  之估計的誤差為正負多少%(10分)

試題評析	本題屬於單一母體成功比例之假設檢定, 題意清楚, 同學獲得滿分不難。
考點命中	《高點·高上統計學講義》第二回, 趙治勳編撰, 第十一章, 頁66。

答:

令  $X$  表支持該政策

母體:  $X \sim Ber(p)$

樣本:  $X_1, \dots, X_{1600} \stackrel{iid}{\sim} Ber(p)$

【版權所有, 重製必究!】

點估計： $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{1600} X_i}{1600} \underset{\text{by C.L.T.}}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{1600}\right)$

(一)  $H_0: p \geq 0.5$  vs  $H_1: p < 0.5$

T.S.:  $Z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{1600}}} \underset{\text{by C.L.T.}}{\sim} N(0, 1)$

R.R.: Reject  $H_0$  at  $\alpha = 0.05$  if  $Z^* < -z_{0.05} = -1.645$

$\Rightarrow \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{1600}}} < -1.645 \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{1600} X_i}{1600} < 0.4794$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{1600} X_i < 767.04 \Rightarrow 1600 - \sum_{i=1}^{1600} X_i \geq 832.96$

因此，不支持之人數至少833人才能夠採拒絕  $H_0: p \geq 0.5$ 。

(二)  $P(|\hat{p} - p| \leq B) = 0.95 \Rightarrow P\left(|Z| \leq \frac{B}{\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{1600}}}\right) = 0.95$

$\Rightarrow \frac{B}{\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{1600}}} = z_{0.025} = 1.96 \Rightarrow B = 1 \cdot \sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{1600}} = 24.5$

四、某洗髮精工廠製造三種洗髮精，分別適用乾性、中性、油性髮質。假設過去五個月的銷售業績如下表：

月份／髮質	乾性	中性	油性
六月	6	9	12
七月	11	14	11
八月	14	11	8
九月	8	9	7
十月	7	10	13

(一)建立如下之變異數分析表：(15分)

Source	DF	SS	MS	F
月份	_____	_____	_____	_____
髮質	_____	_____	_____	_____
Error	_____	_____	_____	_____
Total	_____	_____	_____	_____

(二)給定 $\alpha = 0.05$ ，試檢定三種洗髮精的平均銷售業績是否相等？(5分)

(三)給定 $\alpha = 0.05$ ，試檢定過去五個月的平均銷售業績是否相等？(5分)

**試題評析** 本題屬於二因子變異數分析之基礎計算題型，講義已經有幾乎相同之例題，獲得滿分不難。

**考點命中** 《高點·高上統計學講義》第二回，趙治勳編撰，第十二章第三節，頁87。

**答：**

(一)

Source	DF	SS	MS	F
月份	4	30	7.5	$F_1^* = 1.119$
髮質	2	8.4	4.2	$F_2^* = 0.627$
Error	8	53.6	6.7	
Total	14	92		

假設模型： $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

(二)

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  vs  $H_0$ : 至少一個  $\mu_i \neq \mu_j, i \neq j$

$$\text{T.S.} : F_2 = \frac{MSB}{MSE} \sim F_{(2,8)}$$

R.R. : Reject  $H_0$  at  $\alpha = 0.05$  if  $F_2^* > F_{(2,8)0.05} = 4.46$

$\because F_2^* = 0.627 \quad \therefore$  don' t reject  $H_0$

我們沒有足夠證據去推論三種髮質洗髮精之平均銷售業績不盡相同。

(三)

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$  vs  $H_0$ : 至少一個  $\mu_i \neq \mu_j, i \neq j$

$$\text{T.S.} : F_1 = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{(4,8)}$$

R.R. : Reject  $H_0$  at  $\alpha = 0.05$  if  $F_1^* > F_{(4,8)0.05} = 3.84$

$\because F_1^* = 1.119 \quad \therefore$  don' t reject  $H_0$

我們沒有足夠證據去推論過去五個月之平均銷售業績不盡相同。

五、隨機變數  $X$ 、 $Y$  之相關係數為  $\rho$ ，期望值分別為  $\mu_x$  及  $\mu_y$ ，變異數分別為  $\sigma_x^2$  及  $\sigma_y^2$ ，試問使  $X + Y$  與  $X - Y$  不相關 (uncorrelated) 的必要條件為何？(10分)

**試題評析** 本題屬於共變數之計算題型，只要同學知道不相關可以共變數為0作討論，獲得滿分不難。

**考點命中** 《高點·高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第五章第三節，頁97。

**答：**

$$\begin{aligned} \text{令 } Cov(X+Y, X-Y) &= Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) - Cov(Y, Y) \\ &= V(X) - V(Y) = \sigma_X^2 - \sigma_Y^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

可得當  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  時， $Cov(X+Y, X-Y) = 0$  表示  $(X+Y)$  與  $(X-Y)$  不相關。

六、某煞車片製造商為了解其產品性能，選了10部車作實驗。X為車速（公里／小時），Y為緊急煞車後的滑行距離（公尺），資料及迴歸ANOVA結果如下：

car	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	1.6	2.1	2.6	3.6	4.2	4.3	4.9	5.5	5.0	6.2
X	30	40	40	50	50	60	70	80	80	90

Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	-0.2371	0.4407	-0.54	0.605
X	0.07181	0.00710	(a)	(b)

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression		19.031	19.031	102.3	0.000
Error	(c)	(d)	0.186		
Total	(e)	(f)			

(一)填滿以上表中空白(a)~(f)。(15分)

(二)求該迴歸模式之判定係數R平方(R square)。(5分)

**試題評析** 本題屬於簡迴歸之基礎計算題型，講義已經有幾乎相同之例題，獲得滿分不難。

**考點命中** 《高點·高上迴歸分析講義》，趙治勳編撰，頁14-16。

**答：**

(一)

$$(a) \frac{0.07181}{0.00710} = 10.114 \quad (b) 2P(T_{(8)} > |10.114|) \approx 0.000$$

$$(c) 9 - 1 = 8 \quad (d) 8 \times 0.186 = 1.488$$

$$(e) 10 - 1 = 9 \quad (f) 19.031 + 1.488 = 20.519$$

$$(二) R^2 = \frac{SSR}{SSE} = \frac{19.031}{20.519} = 0.9275$$

【版權所有，重製必究！】