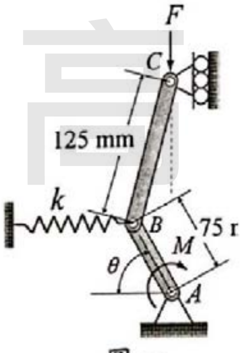
《工程力學(包括材料力學)》

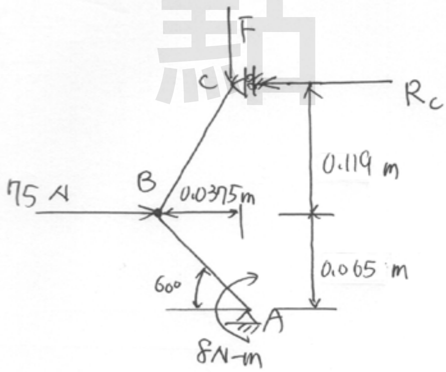
一、圖一之結構，彈力常數為$k=2000N/m$之彈簧連接在B點，且當$\theta=90^{\circ}$時，彈簧不伸長也不縮短。力矩$M=8N\cdot m$作用於A點。力量F作用於C點。求當$\theta=60^{\circ}$時，欲使結構達平衡時所須之力F＝？（25分）



圖一

試題評析	屬於平面剛體平衡基本題型。
考點命中	《高點土木突破靜力學講義》洪達老師編撰，p. 2-133。

答：



□取BC段：

$\Sigma M_B=0$

$\Rightarrow R_C(0.119)-F(0.0375)=0\Rightarrow R_C=0.315F$

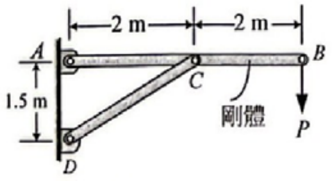
□取整體：

$\Sigma M_A=0$

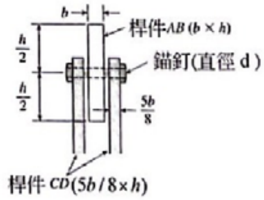
$\Rightarrow 0.315F\times(0.119+0.065)-8-75\times0.065=0$

$\therefore F=222.14(N)$

二、圖二(a)之結構，水平桿件AB為矩形截面（寬$b=40mm$，高$h=100mm$），長$L=4m$，桿件AB為剛體。傾斜CD桿是由兩根矩形截面桿（寬$5b/8$，高h）組成，傾斜CD桿之楊氏模數$E=20GPa$模數。AB桿與CD桿在C點用直徑$d=20mm$之錨釘固定，如圖二(b)所示。若錨釘之允許剪應力$\tau_{allow}=100MPa$，則載重P之允許值$P_{allow}=$？又，在允許載重P_{allow}下，B點垂直位移$\delta_B=$？（25分）



圖二(a)



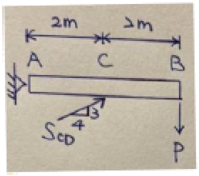
圖二(b)：在C點之結構

試題評析	簡單的軸力系統分析題目，要注意的是在 C 點接合處有三個問題故為雙剪，其剪應力作用值僅有一半；另外可藉由維氏圖將 B 點垂直位移算出。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.3.3。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.1.14。

答：

1.計算允許載重P_{allow}

將CD桿件切開並取上方剛體的自由體，對鉸支承A點取力矩平衡可得CD桿件內力S_{CD}：



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (S_{CD}\times\frac{3}{5})(2)-(P)(4)=0 \Rightarrow S_{CD}=\frac{10P}{3}\ (\text{壓力})$$

由右側剖圖可知CD桿是由「兩根」矩形截面所組成，因此其**受剪面有2個**，故螺栓於受剪面上承受的力量為**S_{CD}之半**。螺栓承受的作用剪應力值τ_v為：

$$\tau_v=\frac{S_{CD}/2}{A_b}=\frac{S_{CD}}{2A_b}=\frac{(10P/3)}{(2)(\frac{\pi}{4}\times 20^2)}$$

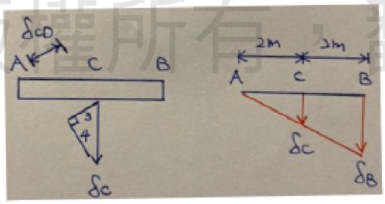
最後由作用剪應力值τ_v小於允許剪應力τ_{allow}可求出允許載重P_{allow}：

$$\Rightarrow \tau_v \le \tau_{allow} \Rightarrow \frac{(10P/3)}{(2)(\frac{\pi}{4}\times 20^2)} \le 100 \Rightarrow \text{允許載重}\ \underline{P_{allow}=18850\ \text{N}=188.5\ \text{kN}}$$

2.在允許載重P_{allow}作用下，求B點垂直位移δ_B

$$\text{CD桿件縮短量}\ \delta_{CD}=\frac{S_{CD}L_{CD}}{EA}=\frac{(10\times 18850/3)(2.5\times 10^3)}{(20\times 10^3)(\frac{5}{8}\times 40\times 100\times 2)}=1.571\ \text{mm}$$

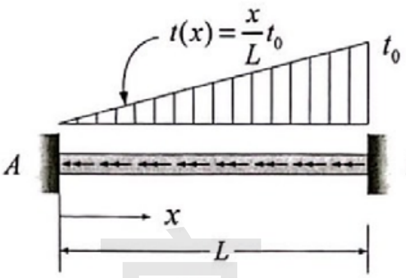
C點位移δ_C與CD桿件縮短量δ_{CD}關係可透過維氏圖得知：



$$\Rightarrow \delta_C\times\frac{3}{5}=\delta_{CD} \Rightarrow \delta_C=\delta_{CD}\times\frac{5}{3}=(1.571)(\frac{5}{3})=2.618\ \text{mm}\ (\downarrow)$$

最後由BC桿為剛體可解出B點垂直位移$\delta_B=2\delta_C=2\times 2.618=\underline{5.237\ \text{mm}\ (\downarrow)}$

三、長為L、直徑為d、剪力模數為G之實心圓桿AB，兩端為固定端，受到分佈扭矩$t(x)=t_0x/L$作用，如圖三所示。求圓桿AB之最大剪應力τ_{max}及最大扭轉角ϕ_{max}。（25分）



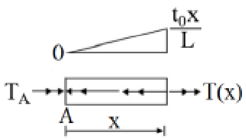
圖三

試題評析	本題完全命中上課用書例題 3.2.4，僅於後續要多算扭轉剪應力跟扭轉角的值，有熟悉靜不定分析者要拿分很容易啊。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題3.1.3。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題3.2.4。

答：

1.先設贅力並計算桿件扭力

本題為一度靜不定扭力桿件，取A點反力T_A(↠)為贅力。接著以A點為起點向左取一段桿件長度x，該處之扭力(內力)函數T(x)可表示為：(T(x)為x函數，代表距A端遠近不同而有不同扭力值)



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T(x) = -T_A + \frac{t_0 x^2}{2L}\text{，}0 \le x \le L$$

2.由變形諧合條件解出贅力

桿件兩端(A點與B點)皆為**固定端**，因此桿件兩端點**相對扭轉角為零**，可寫出其變形諧合條件：

$$\Rightarrow \phi_{AB} = \int_0^L \frac{T(x)\,dx}{GJ} = \frac{1}{GJ}\int_0^L \left(-T_A + \frac{t_0 x^2}{2L}\right) dx = \frac{1}{GJ}\left(-T_A L + \frac{t_0 L^2}{6}\right) = 0$$

可解出贅力$T_A = \frac{t_0 L}{6}$ (↠)，B點反力$T_B = \frac{t_0 L}{2} - T_A = \frac{t_0 L}{3}$ (↠)

3.計算圓桿最大剪應力τ_{max}及最大扭轉角ϕ_{max}

桿內最大扭力$T_{max} = T(x = L) = -\frac{t_0 L}{6} + \frac{t_0 L^2}{2L} = \frac{t_0 L}{3}$

圓桿最大剪應力$\tau_{max} = \frac{T_{max} r}{J} = \frac{\left(\frac{t_0 L}{3}\right)\left(\frac{d}{2}\right)}{\left(\frac{\pi d^4}{32}\right)} = \underline{\frac{16 t_0 L}{3\pi d^3}}$

桿件內任一處扭轉角之值可用函數x來表示：

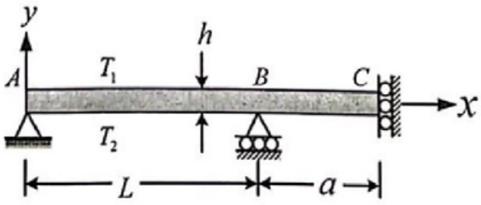
$$\phi_{AB}(x) = \int_0^x \frac{T(x)\,dx}{GJ} = \frac{1}{GJ}\int_0^x \left(-T_A + \frac{t_0 x^2}{2L}\right) dx = \frac{t_0}{6GJ}\left(-Lx + \frac{x^3}{L}\right)$$

欲求AB段最大扭轉角發生位置可將$\phi_{AB}(x)$對x微分，即是$\dfrac{d(\phi_{AB}(x))}{dx}=0$：

$$\frac{d(\phi_{AB}(x))}{dx}=0 \Rightarrow -L+\frac{3x^2}{L}=0 \Rightarrow \text{可解}x=\pm\frac{L}{\sqrt{3}}(\text{負不合})\text{，故}x=\frac{L}{\sqrt{3}}$$

故圓桿最大扭轉角$\phi_{max}=\phi_{AB}(\frac{L}{\sqrt{3}})=\dfrac{-32t_0L^2}{9\sqrt{3}G\pi d^4}=\underline{\dfrac{32t_0L^2}{9\sqrt{3}G\pi d^4}\text{(問值可將負號拿掉)}}$

四、梁ABC，在C點為滑動支撐，如圖四所示，梁之撓曲勁度為EI，熱膨脹係數為α，梁之上下緣分別受到溫度T_1及$T_2(T_2>T_1)$作用。試求C點的力矩M_C，以及C點的垂直（y向）位移δ_C。（寫出大小並標出方向）（25分）



圖四

試題評析	一次靜不定梁分析的入門題型，題目未指定方法故考場上選一個自己最有把握的方法即可；另外答案要儘可能寫到最簡化，這樣才不會有被扣分風險。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.2.5。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.2.4。

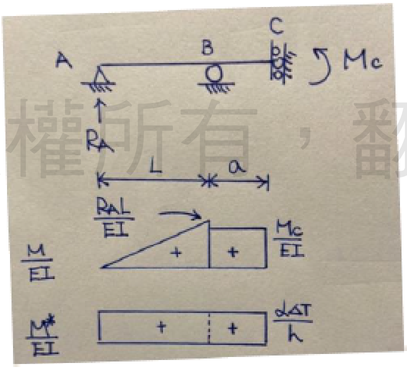
答：

本題為一次靜不定梁桿件且未指定解題方法，讀者可選定較為熟悉之方法進行求解，以下採**彎矩面積法**進行求解，當然本題採**共軛梁法**亦是個不錯選擇。

1.先設贅力並計算支承力

取C點反力矩M_C (↺)為贅力，並對B點取力矩平衡可得A點垂直反力R_A：

$$\sum M_B=0 \Rightarrow R_A=\frac{M_C}{L}\ (\uparrow)$$



2.繪梁桿件之$\dfrac{M}{EI}$圖，並使用彎矩面積法公式求解贅力值

梁桿件之$\dfrac{M}{EI}$如圖。將**B點**視為「**虛擬固定端**」並繪組合彎矩圖，使用「**彎矩面積法公式**」，先處理AB段：

$\Delta_{右側}=\Delta_{左側}+L_{左右側}\theta_{左側}+$(左側至右側$\frac{M}{EI}$圖面積對右側之面積一次矩)：

$\Rightarrow \Delta_B=0=(\Delta_A=0)+(L\theta_A)+(\frac{R_AL}{EI})(\frac{L}{2})(\frac{L}{3})+(\frac{\alpha\Delta T}{h})(L)(\frac{L}{2})$

$\Rightarrow$ 可解出A點轉角$\theta_A=\frac{-M_CL}{6EI}-\frac{\alpha\Delta TL}{2h}$，其中$\Delta T=(T_2-T_1)$

$\theta_{右側}=\theta_{左側}+$(左側至右側$\frac{M}{EI}$圖面積)：

$\Rightarrow$ B點轉角$\theta_B=\theta_A+(\frac{R_AL}{EI})(\frac{L}{2})+(\frac{\alpha\Delta T}{h})(L)=\frac{M_CL}{3EI}+\frac{\alpha\Delta TL}{2h}$

接著處理BC段，$\theta_{右側}=\theta_{左側}+$(左側至右側$\frac{M}{EI}$圖面積)：

$\Rightarrow \theta_C=0=\theta_B+(\frac{M_C}{EI})(a)+(\frac{\alpha\Delta T}{h})(a)$

$\Rightarrow$ 可解出C點力矩$\underline{M_C=-\frac{3\alpha\Delta TEI}{2h}(\frac{L+2a}{L+3a})\ (\circlearrowright)}$

3.計算C點垂直(y向)位移δ_C

將已求解所得之M_C代回可得B點轉角θ_B：

$\Rightarrow$ B點轉角$\theta_B=\frac{L}{3EI}[-\frac{3\alpha\Delta TEI}{2h}(\frac{L+2a}{L+3a})]+\frac{\alpha\Delta TL}{2h}=\frac{\alpha\Delta TL}{2h}(\frac{a}{L+3a})$

最後代入有關位移之彎矩面積法公式可得C點垂直位移δ_C：

$\Delta_{右側}=\Delta_{左側}+L_{左右側}\theta_{左側}+$(左側至右側$\frac{M}{EI}$圖面積對右側之面積一次矩)：

$\Rightarrow \Delta_C=\delta_C=(\Delta_B=0)+(a\theta_B)+(\frac{M_C}{EI})(a)(\frac{a}{2})+(\frac{\alpha\Delta T}{h})(a)(\frac{a}{2})$

$\Rightarrow$ C點垂直位移$\underline{\delta_C=\frac{\alpha a^2L(T_2-T_1)}{4h(L+3a)}\ (\uparrow)}$