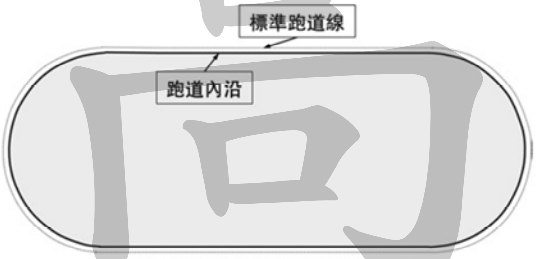
《測量學概要》

一、某田徑場的 400 m 競賽跑道是由兩個半圓加上兩個直線段組成的長圓形（如下圖），為檢驗此競賽跑道是否符合標準進行觀測，量測跑道內沿的直線段長度得$L=84.392$ m，及半圓半徑得$r=36.506$ m，若競賽標準跑道的估算是按跑道內沿外擴 0.3 m 來計算，請計算此標準跑道的總長度P。若以上距離的觀測中誤差皆為$\sigma=\pm 0.005$ m，則總長度的中誤差σ_P應為何？若跑道內的場域都要鋪設草坪，請估算應鋪設草坪的面積A及其中誤差σ_A。（所有答案皆須以適當的有效位數及單位表示之）（20 分）



試題評析	本題係為量測圓半徑與長度，求周長與面積之誤差傳播定律應用，屬基本題型。
考點命中	高點《測量學(一)》講義，第一章測量概論，P5

解：

(一)計算此標準跑道的總長度P及其中誤差σ_P

$$P=2\pi R+2L=2\pi(r+0.3)+2L=2\pi(36.506+0.3)+2\times 84.392=400.043$$

$$\frac{\partial P}{\partial r}=2\pi$$

$$\frac{\partial P}{\partial L}=2$$

$$\Rightarrow \sigma_P=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2\sigma_r^2+\left(\frac{\partial P}{\partial L}\right)^2\sigma_L^2}=\pm\sqrt{(2\pi)^2\sigma_r^2+(2)^2\sigma_L^2}=\pm 2(0.005)\sqrt{\pi^2+1}=\pm 0.033m$$

(二)計算應鋪設草坪的面積A及其中誤差σ_A

$$A=A_{cir}+A_{rec}=r^2\pi+2rL=36.506^2\pi+2(36.506)(84.392)=10348.392\mathrm{m}^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial r}=2\pi r+2L=2\pi(36.506)+2(84.392)=398.158\mathrm{m}$$

$$\frac{\partial A}{\partial L}=2r=2(36.506)=73.012\mathrm{m}$$

$$\Rightarrow \sigma_A=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2\sigma_r^2+\left(\frac{\partial A}{\partial L}\right)^2\sigma_L^2}=\pm 0.005\sqrt{398.158^2+73.012^2}=\pm 2.204m^2$$

版權所有，重製必究

二、應用某全測站儀觀測 A 及 B 點間之斜距及縱角，以進行三角高程測量，若 A 點之高程及精度為 $H_A = 650.762 \pm 0.020\text{ m}$，儀器架設於 A 點（儀器高 $h_i = 1.658 \pm 0.005\text{ m}$），稜鏡架設於 B 點（稜鏡高 $h_r = 1.566 \pm 0.005\text{ m}$），觀測得其斜距 $S = 256.971\text{ m}$，而以正鏡及倒鏡觀測縱角（天頂距）之讀數如下表，首先請依據縱角正倒鏡讀數估計縱角，進而請依據上述數據計算 B 點高程，若此全測站儀之測距先驗精度為 $\pm(3\text{ mm}+10\text{ ppm})$，縱角觀測先驗精度為 $\pm 20''$，請計算 B 點高程之中誤差。(20 分)

測站	觀測點	鏡位	縱角讀數
A	B	正	87°23'32"
		倒	272°36'06"

試題評析	1.正倒鏡觀測係為重複觀測，可提高成果精度。 2.三角高程誤差傳播定律應用，屬中等題型。
考點命中	高點《測量學(一)》講義，第一章測量概論，P5

解：

(一)計算縱角(天頂距)

$$z = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + 360) = \frac{1}{2}(87°23'32'' - 272°36'06'' + 360) = 87°23'43''$$

$$\frac{\partial z}{\partial z_1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial z_2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma_z = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial z_1}\right)^2 (\sigma_{z_1})^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z_2}\right)^2 (\sigma_{z_2})^2} = \pm 20''\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm 10\sqrt{2}'' = \pm 14.1''$$

(二)計算B點高程及其中誤差$H_B \pm \sigma_B$

$H_B = H_A + Scosz + h_i - h_r = 650.762 + 256.971 \times cos87°23'43'' + 1.658 - 1.566 = 662.532m$

$\sigma_S = \pm\sqrt{3^2 + (10 \times 10^{-6} \times 256.971)^2} = 0.00395 \approx \pm 0.004m$

各觀測量及其精度	對各觀測量偏微分
$H_A = 650.762 \pm 0.020m$	$\frac{\partial H_B}{\partial H_A} = 1$
$S = 256.971 \pm 0.004$	$\frac{\partial H_B}{\partial S} = cosz$
$z = 87°23'43'' \pm 14.1''$	$\frac{\partial H_B}{\partial z} = -Ssinz$
$h_i = 1.658 \pm 0.005m$	$\frac{\partial H_B}{\partial h_i} = 1$
$h_r = 1.566 \pm 0.005m$	$\frac{\partial H_B}{\partial h_r} = -1$

$$\sigma_{H_B} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial H_B}{\partial H_A}\right)^2 (\sigma_{H_A})^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial H_S}\right)^2 (\sigma_S)^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\sigma_z}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial h_i}\right)^2 (\sigma_{h_i})^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial h_r}\right)^2 (\sigma_{h_r})^2}$$

版權所有，重製必究

$$\Rightarrow \sigma_{H_B}=\pm[(1\times 0.02)^2+(cos87°23'43''\times 0.004)^2+\left(-256.971\times sin87°23'43''\times\frac{14.1''}{206265''}\right)^2+(1\times 0.005)^2+(1\times 0.005)^2]^{0.5}=\pm 0.02753\approx 0.0275m$$

三、設有 A,B,C 三個點位，其中 A 及 B 兩點之 TWD97 投影平面之 (E,N) 坐標(m)為已知，即 $A(168500.123,2545003.361)$ 及 $B(168589.981,2544883.334)$。依序於 A,B 及 C 三點架設經緯儀進行單角法觀測順鐘向水平角 $\theta_{BAC},\theta_{ABC}$ 及 θ_{BCA}，得觀測數據如下表。首先請依據讀數計算 $\theta_{BAC},\theta_{ABC}$ 及 θ_{BCA}，再依據敘述及角度值繪製點位及角度關係簡圖，並計算三角形閉合差，進而依據已知坐標及觀測值計算 AB, BC, CA 邊方位角 φ_{AB}, φ_{BC} 及 φ_{CA}。(20 分)

測站	測點	鏡位	水平角讀數	正倒鏡平均	角度
A	B	正	123°45'52"		
		倒	303°45'32"		
	C	正	42°59'35"		
		倒	222°58'52"		
B	A	正	56°25'56"		
		倒	236°26'12"		
	C	正	100°59'35"		
		倒	281°00'12"		
C	B	正	183°27'50"		
		倒	3°28'05"		
	A	正	238°07'15"		
		倒	58°07'12"		

試題評析	本題係分別於A、B、C施測單角法，並推求方位角，屬中等偏易題型。
考點命中	高點《測量學(一)》講義，第四章角度測量，P89

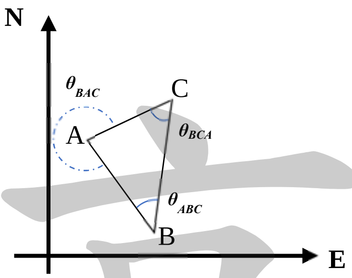
解：

(一)依據讀數計算 θ_{BAC}、θ_{ABC}、θ_{BCA}

測站	測點	鏡位	水平角讀數	正倒鏡平均	角度
A	B	正	123˚45’52’’	123˚45’42’’	279˚13’31’’
		倒	303˚45’32’’		
	C	正	42˚59’35’’	45˚59’14’’	
		倒	222˚58’52’’		
B	A	正	56˚25’56’’	56˚26’04’’	44˚33’50’’
		倒	236˚26’12’’		
	C	正	100˚59’35’’	100˚59’54’’	
		倒	281˚00’12’’		
C	B	正	183˚27’50’’	183˚27’58’’	54˚39’16’’

版權所有，重製必究

		倒	3°28'05''		
	A	正	238°07'15''	238°07'14''	
		倒	58°07'12''		



$$\theta_A = 360° - \theta_{\angle BAC} = 360° - 279°13'31'' = 80°46'29''$$

$$三角形內角和[\theta] = 179°59'34''$$

$$閉合差\omega = [\theta] - 180° = -25''$$

改正值依觀測角分配

	觀測角度	改正值	改正後角度
$\theta_A = \theta_{\angle CAB}$	$80°46'29''$	$+9''$	$80°46'38''$
$\theta_B = \theta_{\angle ABC}$	$44°33'50''$	$+8''$	$44°33'58''$
$\theta_C = \theta_{\angle BCA}$	$54°39'16''$	$+8''$	$54°39'24''$

(二)計算AB、BC、CA邊方位角

1. 正算AB方位角

$$\theta_{AB} = \tan^{-1}\left|\frac{\Delta E_{AB}}{\Delta N_{AB}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{E_B - E_A}{N_B - N_A}\right|$$

$$\Rightarrow \theta_{AB} = \tan^{-1}\left|\frac{168589.981 - 168500.123}{25444883.334 - 2545003.361}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{89.858}{-120.027}\right| = 36°49'13''$$

$$\varphi_{AB} = 180° - \theta_{AB} = 180° - 36°49'13'' = 143°10'47''$$

2. 計算BC、CA邊方位角

$$\varphi_{BC} = \varphi_{AB} + 180° + \theta_{\angle ABC} = 143°10'47'' + 180° + 44°33'58'' = 367°44'45'' = 7°44'45''$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BC} + 180° + \theta_{\angle BCA} = 7°44'45'' + 180° + 54°39'24'' = 242°24'09''$$

四、地形圖上表示地貌的等高線之最主要的兩種曲線類型為何？請分別說明這兩種曲線的用途及線型。何謂等高線間距？等高線間距與描述地貌的詳細程度有何關係？地形圖比例尺與等高線間距的選擇有何種關連？最後請描述等高線在山脊及山谷地區所呈現的樣貌。(20 分)

試題評析	本題為地形測量等高線種類及其表示方式，屬中等偏易基本題型。
考點命中	高點《測量學(二)》講義，第八章地形測量，P26

解：

(一)地形圖上表示地貌的等高線之最主要的兩種曲線類型

最主要的兩種曲線為首曲線(主曲線)與計曲線

(二)這兩種曲線的用途及線型

1.首曲線(主曲線)

(1)用途：用以表示地貌之基本等高線。

版權所有，重製必究

(2)線型：一般0.2mm細實線繪製。

2.計曲線

(1)用途：為便於閱讀計算等高線。

(2)線型：多自基準面起，每五倍數之首曲線繪以較粗的實線，且多有加註高程。

(三)何謂等高線間距

地圖上兩相鄰主曲線之高程差，稱為等高距。

(四)等高線間距與描述地貌的詳細程度之關係

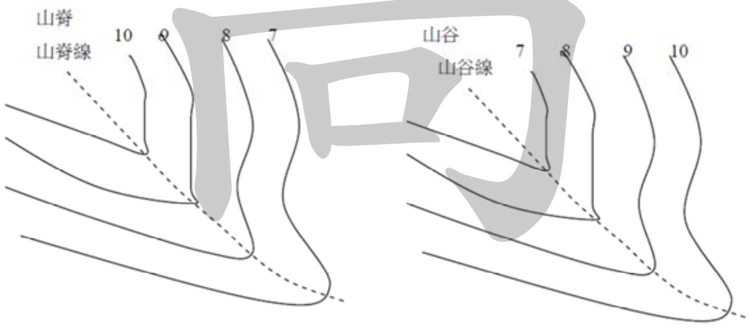
測區地勢起伏愈大，等高線間距宜採較大，以避免等高線過度密集。

(五)地形圖比例尺與等高線間距的選擇之關聯

地形圖比例尺較大時，等高距較小；地形圖比例尺為1/1000、1/5000等高距常採1、2公尺。

(六)等高線在山脊及山谷地區所呈現的樣貌

等高線應與山脊線或山谷線成正交。

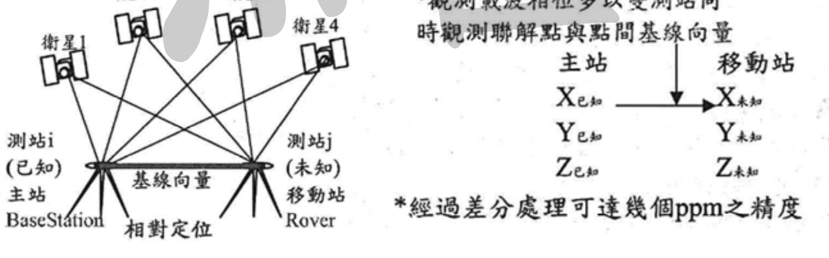


五、若有兩個地面點位 A 及 B 點，彼此相距不到一公里，今應用兩部 GNSS 衛星接收儀進行兩點間之靜態基線測量，觀測計算得這兩個點位間之基線分量為$(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$，請說明此基線分量的定義（請繪圖並以文字描述之）。若想從基線分量求得這兩點間之三度空間距離、平面距離及橢球高差，請說明其計算方法或程序。(20分)

試題評析	本題係GNSS基線測量應用，並須說明間接觀測平差計算程序，屬中等偏難題型。
考點命中	高點《測量學(二)》講義，第十章全球定位系統，P61

解：

(一)基線分量的定義（請繪圖並以文字描述之）：在二個測站上使用GPS衛星接收儀同步觀測成果，可得到二點之間的基線(Base Line)向量觀測值，它是在WGS空間坐標系下的三維坐標差。



基線向量觀測值為

$$\Delta X_{12} = X_2 - X_1$$
$$\Delta Y_{12} = Y_2 - Y_1$$
$$\Delta Z_{12} = Z_2 - Z_1$$

版權所有，重製必究

(二)兩點間之三度空間距離S、平面距離D及橢球高Δh計算方式

各待定點的空間直角坐標平差值為參數，該參數之型式定為：$X = X^0 + \hat{X}$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^0 \\ Y_1^0 \\ Z_1^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \delta Z_1 \end{bmatrix}；\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2^0 \\ Y_2^0 \\ Z_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix}$$

(1)基線向量觀測方程式

$$\begin{bmatrix} v_{X_{12}} \\ v_{Y_{12}} \\ v_{Z_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \delta Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_{12} - \Delta X_{12}^0 \\ \Delta Y_{12} - \Delta Y_{12}^0 \\ \Delta Z_{12} - \Delta Z_{12}^0 \end{bmatrix}$$

令 $V = \begin{bmatrix} v_{X_{12}} \\ v_{Y_{12}} \\ v_{Z_{12}} \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，\hat{X} = [\delta X_1 \quad \delta Y_1 \quad \delta Z_1 \quad \delta X_2 \quad \delta Y_2 \quad \delta Z]^T，L = \begin{bmatrix} \Delta X_{12} - \Delta X_{12}^0 \\ \Delta Y_{12} - \Delta Y_{12}^0 \\ \Delta Z_{12} - \Delta Z_{12}^0 \end{bmatrix}$$

(2)組法方程式

$$N = A^T A、U = A^T L$$

(3)最佳推定解

$$\hat{X} = N^{-1} U$$

(4)誤差分析

$$\hat{V} = A\hat{X} - L$$

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{\hat{V}^T \hat{V}}{m-n}}$$

$$\sigma_{\hat{X}\hat{X}} = \hat{\sigma}_0 N^{-1}$$

(4)空間距離S、平面距離D及橢球高Δh

$$S = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

$$D = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$\Delta h = Z_2 - Z_1$$

版權所有，重製必究