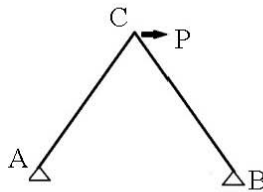


《靜力學與材料力學》

- 一、如圖一所示，桿件 AC 與 BC 在 A 點與 B 點均以插銷 (pin) 連結於支承上。 $\angle CAB = \angle CBA = 60^\circ$ 。在節點 C 上受到水平力 P 作用 ($P > 0$)。桿件 AC 彈性係數為 68.9 GPa，拉伸與壓縮的降伏強度為 255 MPa。桿件 BC 彈性係數為 200 GPa，拉伸與壓縮的降伏強度為 250 MPa。桿件 AC 與桿件 BC 的截面為 40 mm×40 mm 的方形截面，兩桿件的長度均為 0.1 m。本題忽略桿件自重所帶來的影響。注意，以下數據解題可能需要： $\sqrt{3}=1.732$ ， $\pi=3.14159$ 。據此，請回答以下問題：
- (一) 請求出桿件 AC 與 BC 所受到的軸力大小 (以 P 表示)，並標明其為張力或是壓力。(12 分)
- (二) 若桿件受壓時的挫曲狀況之安全因子設為 2，而受軸力的降伏狀況之安全因子為 1.5，而且不論那根桿件挫曲或降伏，即視為失敗。據此，請問水平力 P 的最大值為多少？(13 分)



圖一

試題評析	簡單桁架的內力分析，後續再比較降伏強度與挫屈強度即可算出最大作用力，屬於送分題。
考點命中	1. 《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題9.3.13。 2. 《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題9.3.9。

解：

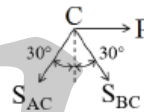
(一) 求出桿件 AC 與 BC 所受到的軸力並標明其為張力或是壓力

利用節點法求出 AC 桿件及 BC 桿件軸力，取 C 點力平衡：

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_{AC} = -S_{BC} \dots (1) \quad 30^\circ$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (S_{AC})\left(\frac{1}{2}\right) - P - (S_{BC})\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \dots (2)$$

由(1)及(2)式可得 AC 桿軸力 $S_{AC} = P$ (拉力)、BC 桿軸力 $S_{BC} = -P$ (壓力)。



(二)考慮挫屈與降伏情況下，水平力P的最大值

$$\text{慣性矩} I = \frac{1}{12}(40 \times 40^3) = \frac{2.56 \times 10^6}{12} \text{ mm}^4$$

$$\text{面積} A = 40 \times 40 = 1600 \text{ mm}^2$$

AC桿受拉力，其恰達容許降伏強度時所對應之外力為 P_1 ：

$$\Rightarrow \sigma_{AC} = \frac{\sigma_{Y,AC}}{F.S._{降伏}} \Rightarrow \frac{S_{AC}}{A} = \frac{\sigma_{Y,AC}}{F.S._{降伏}} \Rightarrow \frac{P_1}{1600} = \frac{255}{1.5} \Rightarrow P_1 = 272 \times 10^3 \text{ N} = 272 \text{ kN}$$

BC桿受壓力，其恰達容許降伏強度時所對應之外力為 P_2 ：

$$\Rightarrow \sigma_{BC} = \frac{\sigma_{Y,BC}}{F.S._{降伏}} \Rightarrow \frac{S_{BC}}{A} = \frac{\sigma_{Y,BC}}{F.S._{降伏}} \Rightarrow \frac{P_2}{1600} = \frac{250}{1.5}$$

$$\Rightarrow P_2 = 266.667 \times 10^3 \text{ N} = 266.667 \text{ kN}$$

BC桿受壓力，其恰達容許挫屈強度時所對應之外力為 P_3 ：

$$\Rightarrow S_{BC} = \frac{P_{cr,BC}}{F.S._{挫屈}} \Rightarrow P_3 = \frac{\pi^2 EI}{(F.S._{挫屈})(KL)^2} = \frac{(\pi^2)(200 \times 10^3)(2.56 \times 10^6 / 12)}{(2)(1.0 \times 0.1 \times 10^3)^2}$$

$$\Rightarrow P_3 = 21.055 \times 10^6 \text{ N} = 21055 \text{ kN}$$

綜上水平力P最大值即為上述所得之最小值，故 $P = \min(P_1, P_2, P_3) = 266.667 \text{ kN}$ 。

二、如圖二所示，有一軸力構件 AB，兩端為固定支承 (Fix end)。構件的長度 $L = 2 \text{ m}$ ，構件由 A36 鋼材所製作，其彈性模數為 $E = 200 \text{ GPa}$ ，構件的截面為圓形，其半徑為 0.1 m 。構件中央處為 C 點。已知在 AC 段，受到分布軸力 $p(x) = x^2 \text{ (kN/m)}$ 施加， $x = 0$ 處為 A 點， x 軸向右為正。圓周率 $\pi = 3.14159$ 。據此，請求出 A 端與 B 端的反力各自為何。(25 分)



圖二

試題評析 簡單一度靜不定軸力桿件分析。考場上不要計算錯誤一定可以拿分！

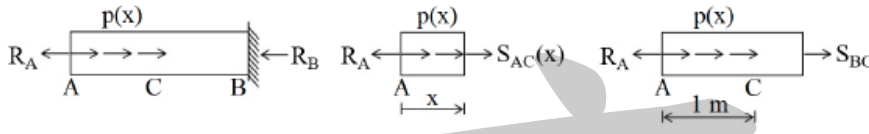
考點命中

- 1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.4.2。
- 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.4.1。

解：

1. 先設贅力並計算支承反力及各桿軸力

本題為一次靜不定軸力桿件，取A點反力 R_A (←) 為贅力，接著計算各桿段軸力：



$$\text{AC 段軸力 } S_{AC}(x) = R_A - \int_0^x p(x) dx = R_A - \int_0^x x^2 dx = R_A - \frac{x^3}{3} \text{ (kN)}$$

$$\text{BC 段軸力 } S_{BC} = R_A - \int_0^L p(x) dx = R_A - \int_0^1 x^2 dx = R_A - \frac{1}{3} \text{ (kN)}$$

2. 計算各桿件伸縮量

桿件 AC 軸力 $S_{AC}(x)$ 在每個斷面皆不同 (軸力 $S(x)$ 為 x 函數，代表距固定端遠近而有不同之軸力)，此時計算 AC 段伸縮量 δ 需採用積分型式：

$$\text{AC 段伸縮量 } \delta_{AC} = \frac{1}{EA} \int_0^L S_{AC}(x) dx = \frac{1}{EA} \int_0^1 (R_A - \frac{x^3}{3}) dx = \frac{1}{EA} (R_A - \frac{1}{12})$$

$$\text{BC 段伸縮量 } \delta_{BC} = \frac{S_{BC}L}{EA} = \frac{1}{EA} (R_A - \frac{1}{3})$$

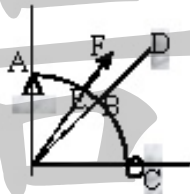
3. 列出變形諧和條件解出贅力

由 AB 段伸縮量與 BC 段伸縮量之總伸縮量為零 (兩端固定端且無初始間隙) 可寫出：

$$\Rightarrow \delta_{AC} + \delta_{BC} = 0 \Rightarrow 2R_A - \frac{5}{12} = 0, \text{ 可解出 A 點反力 } R_A = \frac{5}{24} \text{ kN (←)}$$

$$\text{B 點反力 } R_B = \frac{1}{3} - R_A = \frac{1}{8} \text{ kN (←)}$$

三、如圖三所示，有一機構由一 $1/4$ 圓弧曲桿 ABC 還有一直桿 BD 所構成。在曲桿的 A 端為鉸支承（以 \triangle 表示），在 C 端為滾支承（以 \circ 代表），曲桿與直桿的聯結在 B 點為插銷，直桿 BD 與水平軸夾角為 45° 。在曲桿上的 E 點受到外力 $F=10\text{kN}$ 作用， E 點受力之力線延伸可以交於 $1/4$ 圓弧曲桿的圓心處。現在假設在 D 點的接觸有靜摩擦係數 $\mu_s=0.25$ 。本題解題可能用到以下數據： $\sqrt{3}=1.732$ ， $\sqrt{2}=1.4142$ 。請問系統能夠保持靜力平衡嗎？若是可以，請問在 D 點的摩擦力大小最大為多少， A 支承反力多少， C 支承反力又為多少？（25 分）



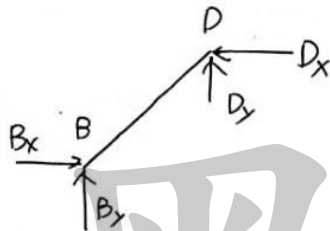
圖三

試題評析 屬於基本平面剛體平衡題型。

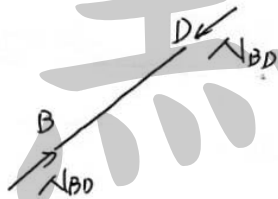
考點命中 與洪達老師《突破靜力學》P.2-92題型相同。

解：

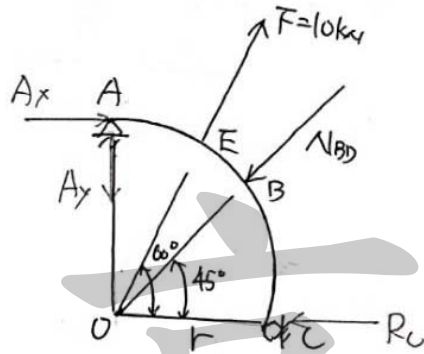
(1) 取 BD 桿分析：



∵ 不考慮 BD 桿之自重 $\Rightarrow BD$ 桿為二力桿件



(2)



① 因ABC桿為剛性, 又不考慮BD桿之自重, 故 $N_{BD} = 0$

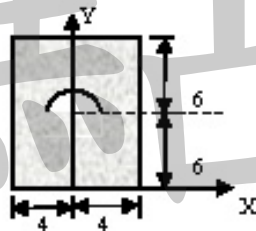
② 假設 $\angle EOC = 60^\circ$ (題目沒給)

$$\therefore \sum M_O = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\therefore \sum F_x = 0 \Rightarrow R_c = 10 \times (\cos 60^\circ) = 5 \text{ (kN)} (\leftarrow)$$

$$\therefore \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 10 \times \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \text{ (kN)} (\downarrow)$$

四、如圖四所示, 圖中尺寸為 mm。陰影區域為一高度 12 mm, 寬度為 8 mm 的矩形區域, 其中挖去一直徑為 4 mm 的半圓形區域, 該半圓形區域的圓心座落在矩形區域的幾何中心處。請求出該陰影區域之幾何中心點之座標為何? (請以圖中所標示的 X-Y 座標系統表示)。過此幾何中心點平行 X 軸之二次面積矩為何? 注意: 解題可能需要, 圓周率 $\pi = 3.14159$ 。(25 分)

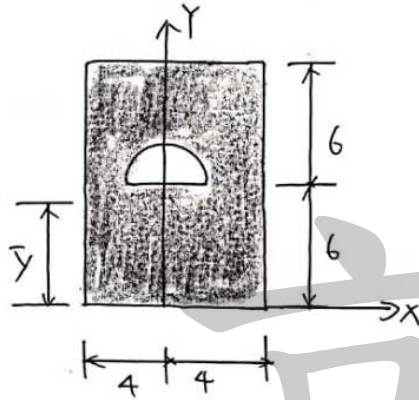


圖四

試題評析	屬於求面積形心慣性矩之基本題型。
考點命中	與洪達老師《突破靜力學》P.5-15題型相同

解:

(1)



$$\bar{y} = \frac{12 \times 8 \times 6 - (2\pi) \left(\frac{8}{3\pi} + 6 \right)}{12 \times 8 - 2\pi} = 5.94 \text{ mm}$$

(2)

半圆对自身形心轴之 $I_c = \left(\frac{2}{8} \right) (2)^4 - (2\pi) \left(\frac{8}{3\pi} \right)^2 = 1.756 \text{ mm}^4$

$$\begin{aligned} \therefore I_c &= \frac{1}{2} \times 8 \times 12^3 + 8 \times 12 \times (5.94 - 6)^2 - \left[1.756 + (2\pi) \left(\frac{8}{3\pi} + 6 - 5.94 \right)^2 \right] \\ &= 1145.4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

高點

黑點