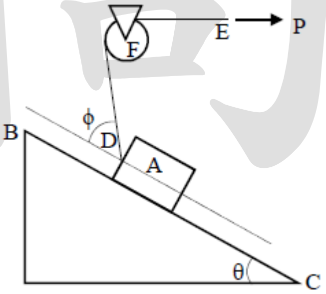
《靜力學概要與材料力學概要》

一、如圖一所示，有一物塊 A 質量為10kg，置放在斜面 BC 上，接觸面的最大靜摩擦係數為 $\mu_s=0.2$。斜面與水平面的夾角為 $\theta=30°$，物塊上緣的中央處 D 有一繩索 DE 繞過一個圓盤的定滑輪 F，定滑輪在 F 點為鉸支承（hinge support）。繩索在 E 處有一水平力 P 作用，且繩索在 D 處與斜面的夾角 $\phi=45°$。忽略定滑輪的質量，並且繩索與滑輪沒有存在任何摩擦。本題用到三角函數值 $\sin30°=0.5$，$\cos30°=0.866$，$\sin45°=\cos45°=0.7071$，$\sin15°=0.2588$，$\cos15°=0.9659$。據此回答以下問題：

㈠若要物塊 A 處於靜止狀態，請問此時水平力 P 最少要為多大？（15分）

㈡接㈠小題，在最小水平力 P 之下，鉸支承 F 的反力為何？請標示出反力的水平分量與垂直分量。（15分）

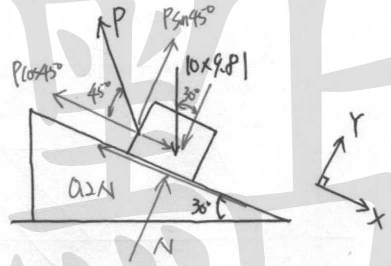


圖一

試題評析	屬於摩擦基本題型。
考點命中	《高點土木靜力學》講義p3-34題型相同。

解：

(1).



⇒求 欲維持A物塊靜止之最小P力，則此時A物即將往下滑動.

⇒摩擦力向上.

$\because \Sigma F_x=0$ ，↘+

$\therefore 10\times9.81\times\sin30° - P\cos45° - 0.2N = 0$ —(1)

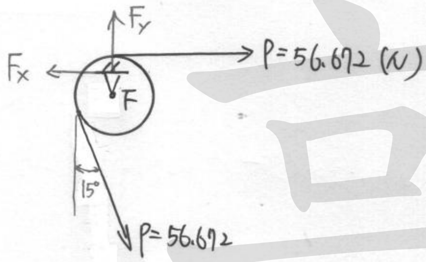
$\because \Sigma F_y=0$ ，↗+

$\therefore N - 10\times9.81\times\cos30° + P\sin45° = 0$ —(2)

∴ 由(1)(2)式得.

$P = 56.672\ (N)$, $N = 44.884\ (N)$

(2).

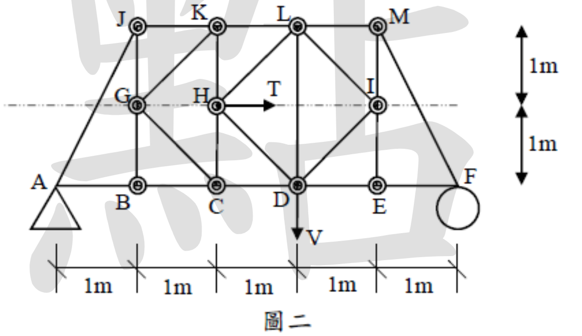


$\because \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = 71.34(N)\ (\longleftarrow)$

$\because \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y = 54.74\ (N)\ (\uparrow)$

$\therefore R_F = \sqrt{(71.34)^2+(54.74)^2} = 89.92\ (N)$

二、如圖二所示，有一桁架系統，桿件之間都以插銷（pin）連接。桁架在 A 處為鉸支承（hinge support），在 F 處為滾支承（roller support）。在 H 節點處有一水平力 T=15 N，在節點 D 處有一垂直向下的力 V=10 N。桿件 AB、BC、CD、DE、EF、JK、KL、LM、GJ、BG、HK、CH、EI、IM 長度均為 1 m。且角 IEF、LMI、DEI、CDL、HKL、GJK、GBC 與 ABG 均為直角。圖二中◎為各節點上之插銷，△為 A 處的鉸支承，而〇為 F 處的滾支承。若有需要可以使用 $\sqrt{2}=1.41412$，$\sqrt{5}=2.2361$ 據此請求出桿件 CD 內所受到的軸力大小，並標示其為張力或是壓力。（25分）

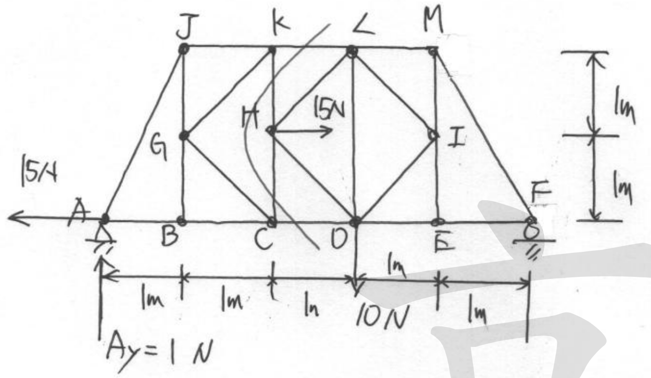


圖二

試題評析	靜力K字形桁梁，屬於基本簡單題型。
考點命中	《高點土木靜力學》講義p2-132題型相同。

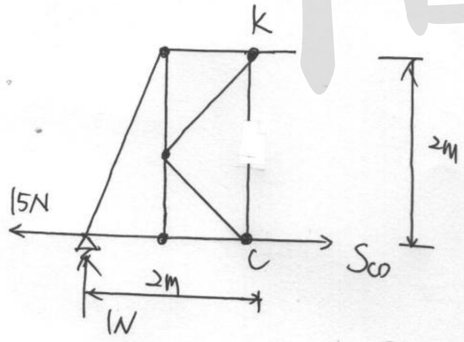
解：

(1)



$\Sigma M_F=0 \Rightarrow A_y=1\,(N)$

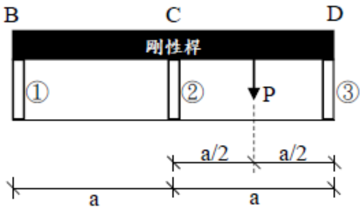
(2)



$\Sigma M_K=0$, ↺

$\Rightarrow S_{CD}\times 2-15\times 2-1\times 2=0 \rightarrow S_{CD}=16\,(N)$(拉)

三、如圖三所示，有一剛性桿（rigid bar）BCD，與三根一樣的彈性短柱（①柱、②柱與③柱）相黏結。三根短柱垂直立於地面上，高度為 L，軸向剛度（axial rigidity）為 EA（E 為彈性模數，A 為斷面積）。剛性桿在 CD 的中央處受到一垂直向下的側向載重 P。求③柱斷面上所受到的軸力為多少，並且標示其軸力為壓力或是張力。（25分）



圖三

試題評析	本題改自104年地特四等考題，《國考材料力學重點暨題型解析》又不小心收錄到了！剛性桿是解題關鍵，程老師上課已經講過N次了喔！
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.4.5。 2.《高點建國材料力學講義》，程中鼎編著，例題2.4.7。

解：

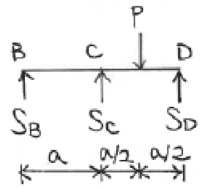
1.先設贅力並計算支承反力及各桿軸力

此為一度靜不定軸力桿件，取③柱桿件內力S_D為贅力。接著依序計算①柱桿件內力S_B及②柱桿件內力S_C：

$\sum M_B = 0 \Longrightarrow S_C(a)+S_D(2a) = P(1.5a) \Longrightarrow$ ②柱桿件內力$S_C = 1.5P - 2S_D$

$\sum F_y = 0 \Longrightarrow$ ①柱桿件內力$S_B = P - S_C - S_D = -0.5P+S_D$

2.計算各桿件伸縮量



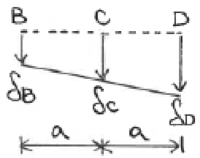
①柱桿件伸縮量$\delta_B = \dfrac{S_B L}{EA}$

②柱桿件伸縮量$\delta_C = \dfrac{S_C L}{EA}$

③柱桿件伸縮量$\delta_D = \dfrac{S_D L}{EA}$

3.列出變形諧和條件解出贅力

因為BCD為一「**剛性**」桿件，因此受力後**剛性桿**會保持**剛體運動**，桿件僅會有**平移旋轉之側移**如圖所示。此時②柱桿件伸縮量δ_C會剛好是①柱桿件伸縮量δ_B與③柱桿件伸縮量δ_D**總和之半**：

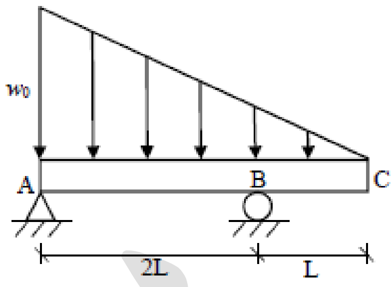


$\Longrightarrow \delta_C = \dfrac{\delta_B+\delta_D}{2} \Longrightarrow$ ③柱桿件內力$S_D = \dfrac{7P}{12}$(壓力)

四、有一外伸梁（overhanging beam）ABC 如圖四所示，AB 長度為2L，BC 長度為 L。在梁上受到一三角形的垂直向下的分布載重，三角形分布載重的最大荷重密度在 A 處，大小為 w_0。梁在 A 處受到鉸支承，在 B 處受到滾支承。梁的彈性模數為 E，對斷面中性軸（neutral axis）的轉動慣量為 I。若有需要可以使用 $\sqrt{2} = 1.41412$，據此回答以下問題：

㈠請問最大彎矩值出現在何處？彎矩值為多少？（10分）

㈡若梁的斷面為矩形斷面，梁高為 h，梁寬為 b，則梁的最大彎矩應力為多少？（10分）



圖四

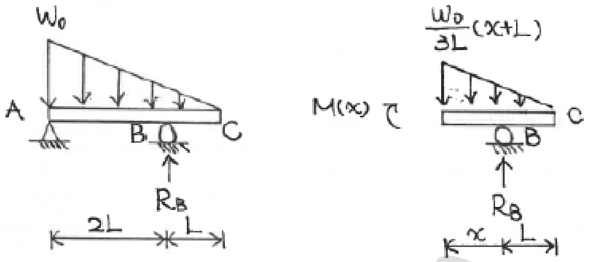
試題評析	本題極類似94年地特三等考題，《高點建國材料力學講義》又命中了！跟著程老師學材力就會掌握近年考題重點，去蕪存菁、投資報酬率高才是讀書方法！
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題4.1.14。 2.《高點建國材料力學講義》，程中鼎編著，例題4.1.3。

解：

(一)計算最大彎矩出現位置及其數值

1.計算支承反力

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (R_B)(2L) = \frac{(w_0 \times 3L)(L)}{2} \Rightarrow R_B = \frac{3w_0L}{4}\ (\uparrow)$$



2.計算彎矩函數 M(x)並求得最大彎矩出現位置及其數值

以 B 點為起始點向左取一段 x 長度，該處彎矩函數 M(x)為：

$$M(x) = R_Bx - [\frac{w_0}{3L}(x+L)](\frac{x+L}{2})(\frac{x+L}{3}) = \frac{3w_0Lx}{4} - \frac{w_0(x+L)^3}{18L}$$

彎矩最大處其剪力值為零，可令 $\frac{dM(x)}{dx} = V(x) = 0$ 算出彎矩最大值發生處：

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3w_0L}{4} - \frac{w_0(x+L)^2}{6L} = 0，可解\ x = (\frac{-4 \pm 6\sqrt{2}}{4})L\ (負值不合)$$

$$\Rightarrow x = (\frac{-4+6\sqrt{2}}{4})L = 1.121L$$

這代表<u>梁內最大彎矩出現在B點往左起算 1.121L位置處</u>，最大彎矩M_{max}就是將$x = 1.121L$代入彎矩函數M(x)：

$$\Rightarrow M_{max} = M(x = 1.121L) = \frac{3w_0L}{4}(1.121L) - \frac{w_0(1.121L+L)^3}{18L} = \underline{0.311w_0L^2}$$

(二)計算梁最大彎矩應力值

對於寬度 b、高度 h 之矩形斷面，其斷面模數為 $S = bh^2/6$，代入撓曲正向應力公式可求得最大彎矩應力σ_{max}：

$$\text{最大彎矩應力}\ \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} = \frac{0.311w_0L^2}{(\frac{bh^2}{6})} = \underline{\frac{1.866w_0L^2}{bh^2}}$$