

# 《統計學》

一、下表為各縣市在109年6月的「扶養比」與「醫療院所平均每千人擁有病床數」。最後一欄為兩變數相乘的值，最後兩列為觀測值的總和與觀測值的平方之總和（平方和）。

縣市	扶養比 (A)	醫療院所平均每千人 擁有病床數 (B)	(A) × (B)
新北市	36.52	4.75	173.470
臺北市	46.47	9.68	449.830
桃園市	37.25	6.72	250.320
臺中市	37.48	7.82	293.094
臺南市	38.90	7.05	274.245
高雄市	38.59	8.14	314.123
宜蘭縣	39.96	8.68	346.853
新竹縣	40.67	5.15	209.451
苗栗縣	40.81	6.39	260.776
彰化縣	40.69	6.28	255.533
南投縣	40.47	6.92	280.052
雲林縣	42.68	5.74	244.983
嘉義縣	40.94	6.70	274.298
屏東縣	38.76	7.11	275.584
臺東縣	39.78	7.04	280.051
花蓮縣	40.29	13.19	531.425
澎湖縣	36.97	5.24	193.723
基隆市	37.28	10.70	398.896
新竹市	42.36	6.34	268.562
嘉義市	41.12	15.01	617.211
金門縣	29.74	2.36	70.186
連江縣	31.50	3.98	125.370
總和	859.23	160.99	6388.035
平方和	33821.94	1349.34	

- (一) 計算109年度的扶養比之第1、第2與第3四分位數，再求得其四分位距 (Interquartile range, IQR)。(10分)
- (二) 繪製109年度的扶養比之盒鬚圖 (box-and-whisker plot)。依據所繪盒鬚圖判斷是否存在離群值；若有，請說明是那些縣市。(5分)
- (三) 假設醫療院所平均每千人擁有病床數服從常態分配，在顯著水準0.05下，檢定醫療院所平均每千人擁有病床數之母體均數是否大於6。(10分)
- (四) 計算扶養比與醫療院所平均每千人擁有病床數兩變數之相關係數。(10分)

試題評析	本題是橫跨兩個章節，包括敘述統計學、母體平均數檢定，都屬於基本計算題，但因為資料筆數多，非常考驗考生按計算機的速度。
考點命中	《高點·高上統計學講義》第一回與第五回，趙治勳編撰，第三章與第十一章。

**答：**

(一) 先將各縣市扶養比由小到大排序如下：

29.74 31.50 36.52 36.97 37.25 37.28 37.48 38.59 38.76 38.90 39.78  
39.96 40.29 40.47 40.67 40.69 40.81 40.94 41.12 42.36 42.68 46.47

$$1 \times \frac{22}{4} = 5.5 \quad Q_1 = X_{(6)} = 37.28$$

$$2 \times \frac{22}{4} = 11 \quad Q_2 = \frac{X_{(11)} + X_{(12)}}{2} = \frac{39.78 + 39.96}{2} = 39.87$$

$$3 \times \frac{22}{4} = 16.5 \quad Q_3 = X_{(17)} = 40.81$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 40.81 - 37.28 = 3.53$$

(二) 台北市落入  $(Q_3 + 1.5IQR, Q_3 + 3IQR)$

金門縣與連江縣落入  $(Q_1 - 3IQR, Q_1 - 1.5IQR)$

故台北市、金門縣與連江縣均為輕度離群值

(三) 令  $X_2$  表醫療院所平均每千人擁有病床數

假設隨機樣本

$$\text{母體: } X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$\text{樣本: } X_{21}, \dots, X_{222} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$\text{點估計: } \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{22})$$

$$H_0: \mu_2 \leq 6 \text{ vs } H_1: \mu_2 > 6$$

$$\text{T.S.: } T = \frac{\bar{X}_2 - 6}{\frac{S_2}{\sqrt{22}}} \sim t_{(22-1=21)}$$

R.R.: Reject  $H_0$  at  $\alpha = 0.05$  if  $T^* > t_{0.05(21)} = 1.721$

$$\therefore T^* = \frac{7.3177 - 6}{\frac{\sqrt{8.1552}}{\sqrt{22}}} = 2.164 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

結論：我們沒有足夠證據去推論兩母體平均數不相同

(四) 令  $X_1, X_2$  分別表扶養比與醫療院所平均每千人擁有病床數

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{SS_{12}}{\sqrt{SS_1} \sqrt{SS_2}} = \frac{\sum X_{1i} X_{2i} - \frac{(\sum X_{1i})(\sum X_{2i})}{n}}{\sqrt{\sum X_{1i}^2 - \frac{(\sum X_{1i})^2}{n}} \sqrt{\sum X_{2i}^2 - \frac{(\sum X_{2i})^2}{n}}} \\ &= \frac{6388.035 - \frac{(859.23)(160.99)}{22}}{\sqrt{33821.94 - \frac{(859.23)^2}{22}} \sqrt{1349.34 - \frac{(160.99)^2}{22}}} = 0.4724 \end{aligned}$$

二、下表為針對三個直轄市市民，對於日常使用搭乘公車或捷運偏好之隨機抽樣調查結果：

	公車	捷運
新北市	364	391
臺北市	369	418
高雄市	280	237

(一) 計算新北市市民於日常偏好搭乘公車的母體比例之95%區間估計。(8分)

(二) 在顯著水準為0.05下，檢定新北與高雄兩直轄市的市民，在日常對於公車的使用偏好的比例是否相等。(10分)

(三) 以顯著水準為0.05，檢定三個直轄市的市民，在日常使用捷運之偏好選擇的比例是否皆為一致。(12分)

試題評析	本題是橫跨三個章節，包括母體成功比例信賴區間、母體成功比例檢定、卡方檢定，都屬於基本計算題，只要小心計算，獲得高分不難。
考點命中	《高點·高上統計學講義》第一回與第五回，趙治勳編撰，第十章、第十一章與第十三章。

**答：**

令  $X_1, X_2, X_3$  分別表新北市、台北市與高雄市市民日常偏好搭乘的是公車

假設  $X_i \perp X_j, i \neq j = 1, 2, 3$

母體： $X_1 \sim \text{Ber}(p_1) \perp X_2 \sim \text{Ber}(p_2) \perp X_3 \sim \text{Ber}(p_3)$

樣本： $X_{11}, \dots, X_{1775} \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p_1), X_{21}, \dots, X_{2787} \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p_2), X_{31}, \dots, X_{3517} \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p_3)$

點估計： $\hat{p}_i \stackrel{\text{by C.L.T.}}{\sim} N(p_i, \frac{p_i(1-p_i)}{n_i})$

$$(一) \text{樞紐量：} Z = \frac{\hat{p}_1 - p_1}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{755}}} \stackrel{\text{by C.L.T.}}{\sim} N(0,1)$$

$$\text{機率區間：} P(-z_{0.025} \leq \frac{\hat{p}_1 - p_1}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{755}}} \leq z_{0.025}) = 0.95$$

結論： $p_1$  之 95% C.I. 為

$$(\hat{p}_1 \pm z_{0.025} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{755}}) = (\frac{364}{755} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\frac{364}{755}(1-\frac{364}{755})}{755}}) = (0.4465, 0.5177)$$

(二)  $H_0: p_1 = p_3$  vs  $H_1: p_1 \neq p_3$

$$\text{T.S.: } Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_3) - (0)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{755} + \frac{1}{517})}} \stackrel{\text{by C.L.T.}}{\sim} N(0,1) \quad \text{其中 } \hat{p} = \frac{364 + 280}{755 + 517} = 0.5063$$

R.R.: Reject  $H_0$  at  $\alpha = 0.05$  if  $|Z^*| > z_{0.025} = 1.96$

$$\therefore Z^* = \frac{(\frac{364}{755} - \frac{280}{517}) - (0)}{\sqrt{(0.5063)(0.4937)(\frac{1}{755} + \frac{1}{517})}} = -2.0836 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

結論：我們有足夠證據去推論新北與高雄兩個直轄市的市民在日常對於公車的使用偏好比例是不相等的。

**【版權所有，重製必究！】**

(三)  $H_0: q_1 = q_2 = q_3$  vs  $H_1: \text{not } H_0$

$$\text{T.S.: } \chi^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi_{(2)}^2$$

R.R.: Reject  $H_0$  at  $\alpha = 0.05$  if  $\chi^{2*} > \chi_{(2)0.05}^2 = 5.991$

$\therefore \chi^{2*} = 7.0639 \quad \therefore \text{reject } H_0$

結論：我們有足夠證據去推論三個直轄市的市民在日常使用捷運的偏好比例是不一致的。

三、某工程公司為了解那些因素會影響員工對於公司福利的滿意程度，進行一項抽樣調查。調查結果以福利滿意度分數（分數愈高表示滿意度愈高）為反應變數，同時以員工之工作年資（單位：年）、薪資（單位：千元）及性別為三個解釋變數，建構迴歸模型分析。分析所得之迴歸殘差標準誤的估計為7.0，且其變異數分析（ANOVA）結果如下：

變異來源	平方和 (SS)	自由度	均方和 (MS)	F 值
Regression	1818	(C)	(E)	(G)
Error	(A)	20	(F)	
Total	(B)	(D)		

(一)請寫出空缺部分 (A) 至 (G)。(7分)

(二)計算判定係數 (coefficient of determination)  $R^2$  及調整的判定係數 (adjusted  $R^2$ )。(8分)

**試題評析** 本題是考簡迴歸分析，屬於基本計算題，只要小心計算，獲得高分不難。

**考點命中** 《迴歸分析申論題完全制霸》，高點文化出版，趙治勳編撰，第二章。

**答：**

(一)

ANOVA TABLE				
source	SS	d.f.	MS	F
Reg	1818	(C)3	(E)606	(G)12.367
Error	(A)980	20	(F)49	
Total	(B)2798	(D)23		

$$(二) R^2 = \frac{1818}{2798} = 0.6497$$

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{MSE}{MST} = 1 - \frac{49}{2798/23} = 0.5972$$

四、若某委員會有四位超過62歲的委員，其中  $\delta$  位是女性， $4 - \delta$  位是男性。考慮假設檢定  $H_0: \delta = 2, H_1: \delta \neq 2$ 。其檢定規則為：若以取出放回的方式，由此四位中隨機抽取兩人，若兩位皆為同性別，則拒絕  $H_0$ ；否則，不拒絕  $H_0$ 。（每小題10分，共20分）

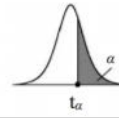
(一)計算其型I錯誤 (type I error) 的機率。

(二)若改為取出不放回，計算其型I錯誤的機率。

【版權所有，重製必究！】

t分配表

Percentage Points of the *t* Distribution;  $t_{v, \alpha}$   
 $P(T > t_{v, \alpha}) = \alpha$



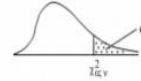
v	$\alpha$													
	0.40	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.02	0.015	0.01	0.0075	0.005	0.0025	0.0005
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
$\infty$	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291



【版權所有，重製必究！】

卡方分配表

Table of the Chi-square Distribution



α =	0.995	0.99	0.98	0.975	0.95	0.90	0.80	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001	=α
V = 1	0.000037	0.00017	0.00028	0.00043	0.00093	0.0158	0.0642	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827	V = 1
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.103	0.211	0.446	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.815	2
3	0.0717	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	1.005	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.268	3
4	0.207	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.649	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.465	4
5	0.412	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	2.343	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750	20.517	5
6	0.676	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457	6
7	0.989	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.322	7
8	1.344	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.125	8
9	1.735	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877	9
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588	10
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	31.264	11
12	3.074	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	32.909	12
13	3.565	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	8.634	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	34.528	13
14	4.075	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	36.123	14
15	4.601	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	19.311	22.307	24.996	27.488	28.249	30.578	32.801	37.697	15
16	5.142	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	39.252	16
17	5.697	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	40.790	17
18	6.265	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	12.857	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	42.312	18
19	6.844	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	43.820	19
20	7.434	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	45.315	20
21	8.034	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	46.797	21
22	8.643	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	48.268	22
23	9.260	10.196	11.293	11.688	13.091	14.848	17.187	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	49.728	23
24	9.886	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	18.062	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.558	51.179	24
25	10.520	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	52.620	25
26	11.160	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.200	54.052	26
27	11.808	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	20.703	32.912	36.741	40.113	43.194	44.140	46.963	49.645	55.476	27
28	12.461	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	21.588	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	56.893	28
29	13.121	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	22.475	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	58.302	29
30	13.787	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	23.364	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	59.703	30
40	20.706	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	32.345	47.269	51.805	55.759	59.342	60.436	63.691	66.766	73.402	40
50	27.991	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	41.449	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490	86.661	50
60	35.535	37.485	39.699	40.482	43.188	46.459	50.641	68.972	74.397	79.082	83.298	84.580	88.379	91.952	99.607	60
70	43.275	45.442	47.893	48.758	51.739	55.329	59.898	79.715	85.527	90.531	95.023	96.388	100.425	104.215	112.317	70
80	51.171	53.539	56.213	57.153	60.391	64.278	69.207	90.405	96.578	101.880	106.629	108.069	112.329	116.321	124.839	80
90	59.196	61.754	64.634	65.646	69.126	73.291	78.558	101.054	107.565	113.145	118.136	119.648	124.116	128.299	137.208	90
100	67.327	70.065	73.142	74.222	77.929	82.358	87.945	111.667	118.498	124.342	129.561	131.142	135.807	140.170	149.449	100

**試題評析** 本題是考假設檢定型I誤差之計算題，跟總複習講義精選100題之練習題82類似，獲得高分不難。

**考點命中** 《高點·高上統計學總複習講義》，趙治勳編撰，精選100題之練習題82。

**答：**

(一)令  $X$  表抽出的兩人中女性之個數(抽後放回)

$$X \sim Bin(2, \frac{\delta}{4})$$

$$H_0 : \delta = 2 vs H_1 : \delta \neq 2$$

$$\alpha = P(X = 0 \text{ or } X = 2 | \delta = 2) = 1 - P(X = 1 | \delta = 2) = 1 - \binom{2}{1} \left(\frac{2}{4}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{4}\right)^{2-1} = 0.5$$

(二)令  $Y$  表抽出的兩人中女性之個數(抽後不放回)

$$Y \sim Hyper(N = 4, m = \delta, n = 2)$$

$$H_0 : \delta = 2 vs H_1 : \delta \neq 2$$

【版權所有，重製必究！】

$$\alpha = P(Y = 0 \text{ or } Y = 2 | \delta = 2) = 1 - P(Y = 1 | \delta = 2) = 1 - \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = 0.3333$$