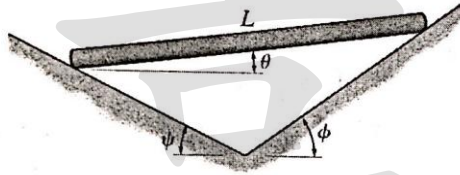


# 《工程力學(包括材料力學)》

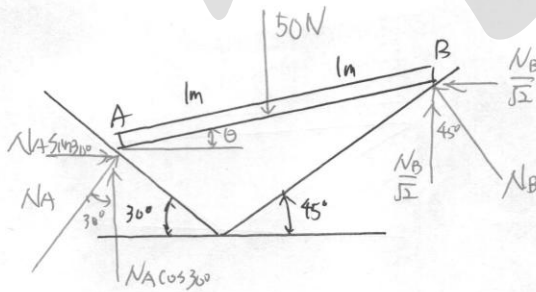
一、如圖示，一長度為  $L=2\text{m}$ ，重量為  $W=50\text{N}$  之均勻桿件靜置於光滑斜面上，已知左斜面傾斜角為  $\psi=30^\circ$ ，右斜面傾斜角為  $\phi=45^\circ$ ，不計桿件之斷面大小，求平衡時桿件之傾斜角  $\theta$  為何？(25 分)



試題評析	平面剛體平衡問題，屬於簡單題型
考點命中	《突破靜力學經典題型》洪達編著，p2-72，題目一模一樣！

解：

(1)



$$\therefore \sum F_x = 0 \rightarrow$$

$$\therefore N_A \sin 30^\circ - \frac{N_B}{\sqrt{2}} = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore N_A \cos 30^\circ + \frac{N_B}{\sqrt{2}} - 50 = 0 \quad (2)$$

$$\therefore \sum M_A = 0 \curvearrowright$$

$$\therefore \frac{N_B}{\sqrt{2}} (2 \cos \theta) + \frac{N_B}{\sqrt{2}} (2 \sin \theta) - 50 (1 \cos \theta) = 0 \quad (3)$$

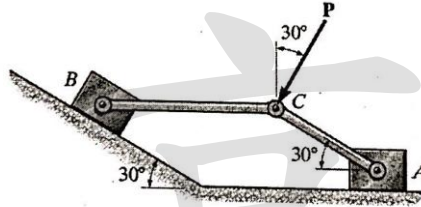
$\therefore$  由 (1)、(2)、(3) 式得

$$N_A = 36.6 \text{ (N)}$$

$$N_B = 25.88 \text{ (N)}$$

$$\theta = 20.11^\circ$$

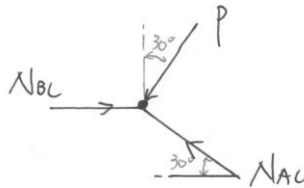
二、如圖示，質量為 10kg 之塊狀物 A 置於水平面上，質量為 5kg 之塊狀物體 B 置於傾斜角為  $30^\circ$  之斜面上，以不計重量之二桿件 AC 與 BC 連接，所有連接點均為無摩擦力之鉸接，BC 桿件為水平，AC 桿件與水平方向夾角為  $30^\circ$ ，兩塊狀物與接觸面之靜摩擦係數均為  $\mu_s = 0.5$ 。今施加一與垂直方向夾角為  $30^\circ$  之力 P 於 C 點，求兩塊狀物均不滑動之最大力 P 為何？(25 分)



試題評析	摩擦物塊運動狀況未明題型，屬於進階較難題型。
考點命中	《突破靜力學經典題型》洪達編著，p3-50，題目一模一樣！

解：

(1). 取 C 節點分析：



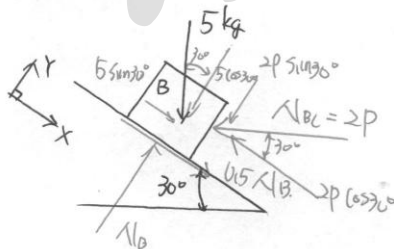
$$\therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore N_A \sin 30^\circ - P \cos 30^\circ \Rightarrow N_{AC} = 1.732 P$$

$$\therefore \sum F_x = 0$$

$$\therefore N_{BC} = P \sin 30^\circ + 1.732 P \cos 30^\circ = 2P$$

(2). 取 B 物塊分析： $\Rightarrow$  假設 B 物塊先滑動  $\Rightarrow$  先達最大靜摩擦力。



$$\therefore \sum F_y = 0, \uparrow +$$

$$\therefore N_B = 5 \times \cos 30^\circ + 2P \sin 30^\circ = 4.33 + P$$

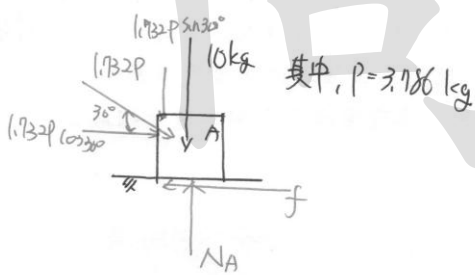
$$\therefore \sum F_x = 0, \rightarrow +$$

$$\therefore 5 \sin 30^\circ + 0.5 N_B - 2P \cos 30^\circ = 0$$

$$\therefore 5 \sin 30^\circ + 0.5 (4.33 + P) - 2P \cos 30^\circ = 0$$

$$\therefore P = 3.786 \text{ kg.}$$

(3) 取 A 物塊分析： $\Rightarrow$  A 物塊未滑動：



$$\therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore N_A = 10 + 1.732 \times 3.786 \times \sin 30^\circ = 13.279 \text{ kg.}$$

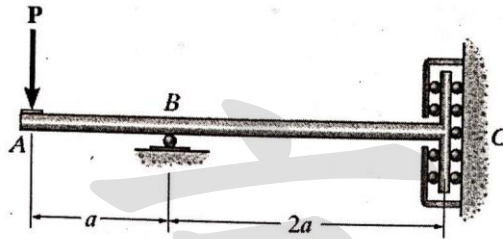
$$\therefore \sum F_x = 0$$

$$\therefore f = 1.732 \times 3.786 \times \cos 30^\circ = 5.679 \text{ kg} < \mu_s N_A = 0.5 \times 13.279 = 6.64 \text{ kg}$$

$\Rightarrow$  A 物塊未滑動  $\Rightarrow$  ok.

$$\therefore P = 3.786 \times 9.81 = 37.14 \text{ (N)}$$

三、如圖示，AC 梁長度為  $3a$ ，撓曲剛度  $EI$  為定值，B 點為滾接支承，C 端結構僅允許垂直位移，其軸向位移及轉角均為零，於 A 點承受一集中力  $P$  作用，求 A 端之轉角及位移。(25 分)



試題評析	本題屬於簡單靜定梁桿件求任意點轉角與位移題型，考場上不要看錯就能得分喔！本題極像87年土木技師考題，每年上課都會教，不知道您是否有把握住？
考點命中	1. 《高點材料力學講義》，程中鼎編著，例題8.3.1。 2. 《國考材料力學重點暨題型解析》，程中鼎編著，例題8.2.3。

解：

1. 必要時先修整負載

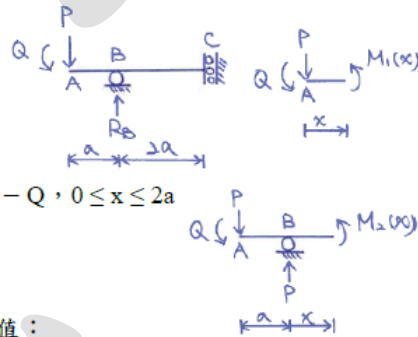
後續採用卡二定理計算A點轉角及位移，於下筆前在A點施加一個額外逆時

針力矩  $Q$ ，由垂直方向力平衡可得  $R_B = P + Q$ 。

2. 分析各桿彎矩函數

AB段彎矩函數  $M_1(x) = -Px - Q, 0 \leq x \leq a$

BC段彎矩函數  $M_2(x) = Px - P(a+x) - Q = -Pa - Q, 0 \leq x \leq 2a$



3. 由  $\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i$  可得  $i$  條  $P_i - \Delta_i$  關係

由卡氏第二定理求解A點轉角  $\theta_A$  及位移  $\Delta_A$  值：

對象	彎矩函數 $M(x)$	$\frac{\partial M(x)}{\partial R_B}$	$\frac{\partial M(x)}{\partial P}$	$\frac{\partial M(x)}{\partial Q}$
AB段	$-Px - Q$	$x$	$-(x+a)$	$-1$
BC段	$-Pa - Q$	$0$	$-x$	$-1$

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} \Rightarrow \int_0^a \frac{M_1}{EI} \left( \frac{\partial M_1}{\partial P} \right) dx + \int_0^{2a} \frac{M_2}{EI} \left( \frac{\partial M_2}{\partial P} \right) dx$$

$$\Rightarrow \Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^a (-Px - Q)(-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{2a} (-Pa - Q)(-a) dx$$

其中  $Q = 0$  ( $Q$  是一開始額外加的，本來就無此力量作用)，代入上式經過整理可得

A點位移  $\Delta_A$ ：

$$\Rightarrow \Delta_A = \frac{7Pa^3}{3EI} \quad (1)$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial Q} \Rightarrow \int_0^a \frac{M_1}{EI} \left( \frac{\partial M_1}{\partial Q} \right) dx + \int_0^{2a} \frac{M_2}{EI} \left( \frac{\partial M_2}{\partial Q} \right) dx$$

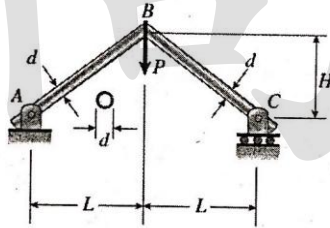
$$\Rightarrow \theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^a (-Px - Q)(-1) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{2a} (-Pa - Q)(-1) dx$$

其中  $Q=0$  ( $Q$  是一開始額外加的，本來就無此力量作用)，代入上式經過整理可得

A點轉角  $\theta_A$ ：

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{5Pa^2}{2EI} \quad (\text{Ⓞ})$$

四、如圖示，剛架 ABC 係由兩根相同且均勻之圓管於 B 點焊接而成，A 端為鉸支承，C 端為滾支承。已知圓管斷面之面積為  $A=22620\text{mm}^2$ ，二次面積矩為  $I=92.74 \times 10^6\text{mm}^4$ ，外徑為  $d=100\text{mm}$ ，於 B 點施加垂直力  $P=10\text{kN}$ ，若  $L=H=2.8\text{m}$ ，求剛架內最大拉應力與最大壓應力分別是多少？(25 分)



試題評析	ABC為剛架而非桁架，故桿內會存在剪力與彎矩值。本題極像100年土木技師考題，有讀過筆者二版題解書的朋友一定會有印象。
考點命中	《國考材料力學重點暨題型解析》，程中鼎編著，例題7.2.18。

解：

#### 1. 計算反力

剛架 ABC 為對稱結構，因此 A 點反力與 C 點反力相同， $R_A = R_C = P/2$  (↑)。

#### 2. 計算剛架內最大壓應力與最大拉應力

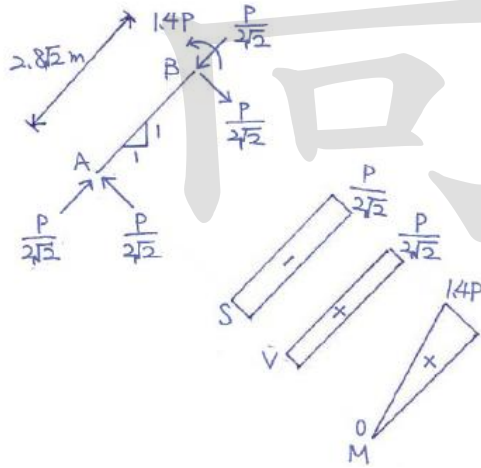
將 A 點反力  $R_A$  分解成朝桿件軸向與橫向方向之力，其值皆為  $P/2\sqrt{2}$ 。接著將 AB 桿件切出後分析 B 點處內力值，B 點處朝桿件軸向與橫向方向之力皆為  $P/2\sqrt{2}$ ，B 點處正彎矩為  $(P/2\sqrt{2})(2.8\sqrt{2}) = 1.4P$  (kN-m)。此時已經算出 AB 桿件軸力、剪力與彎矩值，將軸力圖、剪力圖與彎矩圖繪出如下。桿件內最大軸壓力為  $P/2\sqrt{2}$ 、最大正彎矩發生在 B 點其值為  $1.4P$  (kN-m)，由合成應力可算出桿件最大拉壓應力值：

$$\text{最大壓應力 } \sigma_{\max,c} = -\frac{\left(\frac{P}{2\sqrt{2}}\right)}{A} - \frac{M_{\max}y_{\max}}{I} = -\frac{\left(\frac{P}{2\sqrt{2}}\right)}{A} - \frac{(1.4P)(d/2)}{I}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max,c} = -\frac{\left(\frac{10 \times 10^3}{2\sqrt{2}}\right)}{22620} - \frac{(1.4 \times 10^3 \times 10 \times 10^3)(100/2)}{(92.74 \times 10^6)} = -7.704 \text{ MPa}$$

$$\text{最大拉應力 } \sigma_{\max,t} = -\frac{\left(\frac{P}{2\sqrt{2}}\right)}{A} + \frac{M_{\max}y_{\max}}{I} = -\frac{\left(\frac{P}{2\sqrt{2}}\right)}{A} + \frac{(1.4P)(d/2)}{I}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max,t} = -\frac{\left(\frac{10 \times 10^3}{2\sqrt{2}}\right)}{22620} + \frac{(1.4 \times 10^3 \times 10 \times 10^3)(100/2)}{(92.74 \times 10^6)} = 7.392 \text{ MPa}$$



黑點