

《統計學概要》

試題評析	這次普考統計的統計學概要考了七題，雖然題目多，但題目很簡單，全都是一些基本觀念且沒有變化的題目，所以請同學平時基本題型的基本功要練習再練習，在普考的90分鐘考試時間內寫完後，檢查再檢查。要上榜的同學這份考卷一定要考到100分，不容有錯。
考點命中	第一題《高點·高上統計學講義》第五回，7-2檢定統計量法決策準則，蘇建郎老師編撰，頁30。 第五回，6-2區間估計，蘇建郎老師編撰，頁1。 第二題《高點·高上統計學講義》第一回，1-2統計量數，蘇建郎老師編撰，頁3,5,7,8。 第三題《高點·高上統計學講義》第一回，2-3條件機率，蘇建郎老師編撰，頁20。 第四題《高點·高上統計學講義》第三回，4-2常態分配，蘇建郎老師編撰，頁31。 第五題《高點·高上統計學講義》第五回，6-3樣本數與誤差，蘇建郎老師編撰，頁22。 第六題《高點·高上統計學講義》第七回，8-2一因子變異數分析，蘇建郎老師編撰，頁6。 第七題《高點·高上迴歸分析講義》第一回，9-2簡單線性迴歸，蘇建郎老師編撰，頁13。

一、某房屋仲介公司廣告宣稱營業區域內的套房市場平均售價是250萬元。某消費者團體為驗證該廣告的真實性，做一項36個樣本的市場調查，經計算得樣本平均售價288萬元。假設售價服從具有母體標準差60萬元的常態分配。

(一)在顯著水準為5%時，說明檢定統計量及其機率分配，並計算顯著性P-值且驗證該公司廣告的真實性。(10分)

(二)求套房平均售價的95%信賴區間，以此說明第(一)小題中的結論，並請敘明理由。(5分)

答：

(一)

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0: \mu = 250 \\ H_1: \mu \neq 250 \end{cases}, \alpha = 0.05, n = 36, \bar{x} = 288, \sigma = 60$$

$$\textcircled{2} \text{檢定統計量 } Z^* = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \text{ 在 } H_0 \text{ 為真下，服從標準常態分配。}$$

$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{288 - 250}{60/\sqrt{36}} = \frac{38}{10} = 3.8$$

$$\textcircled{3} p\text{-value} = P(Z > z^* | H_0) = 2 \times P(Z > 3.8) = 0.00058 < \alpha = 0.05, \text{ reject } H_0$$

(註：考卷附的z查表值未給3.8)

④故在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 的情況下，根據樣本資料顯示，我們有證據說 $\mu \neq 250$ ，即該區套房平均售價不為250萬。

(二)

$$n = 36, \bar{x} = 288, \sigma = 60, 1 - \alpha = 0.95, z_{0.025} = 1.96$$

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 288 \pm 1.96 \frac{60}{\sqrt{36}} \Rightarrow (268.4, 307.6) \text{ 為套房平均數售價的 } 95\% \text{ 信賴區間，此區間未包含 } 250 \text{ 萬，}$$

故結論與(一)相同，該區套房平均售價不為250萬。

【版權所有，重製必究！】

二、在一組隨機樣本17、15、23、7、9、13中，已得知變異數33.2，計算平均數、變異係數(CV)，以及全距(range)與四分位距(IQR)各是多少？(12分)

答：

$$\text{平均數 } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{17+15+\dots+13}{6} = 14$$

$$\text{變異係數樣本 } C.V. = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{\sqrt{33.2}}{14} \times 100\% = 41.16\%$$

$$\text{全距 } r = x_{(6)} - x_{(1)} = 23 - 7 = 16$$

$$n = 6, \text{ 資料排序 } (7, 9, 13, 15, 17, 23)$$

$$n \times \frac{1}{4} = 6 \times \frac{1}{4} = 1.5 \text{ 為非整數, 故 } Q_1 = x_{(2)} = 9$$

$$n \times \frac{3}{4} = 6 \times \frac{3}{4} = 4.5 \text{ 為非整數, 故 } Q_3 = x_{(5)} = 17$$

$$\text{四分位距 } IQR = Q_3 - Q_1 = 17 - 9 = 8.$$

三、在某學校的月考成績中，有40%學生數學不及格，25%學生英文不及格，10%學生數學與英文都不及格。今隨機抽取一位學生，試求：（每小題6分，共18分）

- (一)若該生英文不及格，則該生數學不及格的機率。
- (二)若該生數學不及格，則該生英文不及格的機率。
- (三)該生英文與數學中至少有一科及格的機率。

答：

M 表示數學不及格事件； E 表示英文不及格事件

由題目得知 $P(M) = 0.4$ ， $P(E) = 0.25$ ， $P(M \cap E) = 0.1$

$$(一) P(M|E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$$

$$(二) P(E|M) = \frac{P(M \cap E)}{P(M)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

$$(三) P(E \cup M) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) = 0.4 + 0.25 - 0.1 = 0.55$$

四、若有400個來自 $N(60, 25)$ 常態分配的數據（右尾 $z_{0.10} = 1.282$ 、 $z_{0.05} = 1.645$ 、 $z_{0.025} = 1.96$ ），則有幾個數據會大於58？（10分）

答：

$$X \sim N(60, 25)$$

$$P(X > 58) = P\left(Z > \frac{58-60}{5}\right) = P(Z > -0.4) = P(Z < 0.4) = 1 - 0.3446 = 0.6554$$

$400 \times 0.6554 = 262.16$ ，故大約會有 263 個數據會大於 58。

五、一位專家想估計一項新的減肥計畫之平均體重減量。在一個初步研究中得知體重減量的母體為標準差15磅的常態分配。（每小題5分，共10分）

- (一)以95%信心水準的區間估計，至少需多少樣本得以估計平均體重減量與母體平均體重減量之差在2磅以內？
- (二)改變標準差為30磅，試問所需的樣本數會是多少？

答：

(一)母體標準差 $\sigma = 15$ ，信心水準 95% $\Rightarrow z_{0.025} = 1.96$ ， $E = 2$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \sigma^2 = \left(\frac{1.96}{2}\right)^2 \times 15^2 = 216.09$$

故樣本需要抽 217 人，才會使得估計平均數信心至少 95%，誤差不超過 2。

$$(二) n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \sigma^2 = \left(\frac{1.96}{2}\right)^2 \times 30^2 = 864.36, \text{ 樣本需要抽 } 865 \text{ 人(大約 } 4 \text{ 倍)}$$

六、一完全隨機實驗中總共有三項處理 (treatment)，每項處理有 5 個觀察值，已知處理平方和 SSTR=520，總平方和 SST=860。(每小題 10 分，共 20 分)

(一) 計算均方誤差 (MSE) 和處理均方值 (MSTR)。

(二) 在顯著水準為 5% 時，檢定三項處理平均值是否相同，計算檢定統計量及其結論 ($F_{0.05}=3.89$)。

答：

(一) 三個處理，自由度為 2

全部實驗觀察次數 $n = 3 \times 5 = 15$ ，總合自由度為 14

ANOVA table

Source	SS	df	MS	F^*
處理	520	2	260	9.18
誤差	340	12	28.3333	
合計	860	14		

MSE=28.3333，MSTR=260。

(二)

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C \\ H_1: \text{not } H_0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ 檢定統計量 } F^* = 9.18$$

$$\textcircled{3} \alpha = 0.05, C = \{F^* \mid F^* > F_{0.05}(2, 12) = 3.89\}, F^* = 9.18 \in C$$

reject H_0

④ 故在 $\alpha = 0.05$ 情況下，根據樣本資料顯示，我們有證據說 μ_i 不完全相等，即三項處理平均值有差異。

七、以 8 組隨機配對樣本進行一項產品銷售量 (y) 和產品不良率 (x) 的迴歸分析中，經計算得到下列資料： $\hat{y} = 127 - 0.425x$ ，迴歸平方和 SSReg=473.65，誤差平方和 SSE=119.21，廣告費用斜率估計的標準差 $S_{b1} = 0.095$ 。(右尾 $t_{0.05}(6) = 1.943$ 、 $t_{0.025}(6) = 2.447$ 、 $t_{0.05}(7) = 1.895$ 、 $t_{0.025}(7) = 2.365$)

(一) 當不良率為 70 時，則銷售量的估計值為何？(5 分)

(二) 在顯著水準為 5% 時，檢定不良率是否對銷售量有負向影響，計算檢定統計值。(10 分)

【版權所有，重製必究！】

標準常態右尾機率表: $P(Z > 1.32) = 0.0934$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

答：

(一) 樣本迴歸線 $\hat{y} = 127 + 0.425x$ ，當 $x = 70$ 時， $\hat{y} = 127 - 0.425 \times 70 = 97.25$

(二)

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0: \beta_1 \geq 0 \\ H_1: \beta_1 < 0 \end{cases} \quad \alpha = 0.05$$

$$MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{119.21}{6} = 19.8683$$

$$SS_{\text{Reg}} = \hat{\beta}_1^2 SS_{xx} \Rightarrow SS_{xx} = \frac{SS_{\text{Reg}}}{\hat{\beta}_1^2} = \frac{473.65}{(-0.425)^2} = 2622.2837$$

$$\textcircled{2} t^* = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{MSE}{SS_{xx}}}} = \frac{-0.425 - 0}{\sqrt{\frac{19.8683}{2622.2837}}} = \frac{-0.425}{1.0176} = -0.4176$$

③ $\alpha = 0.05$, $C = \{t^* \mid t^* < -t_{\alpha}(n-2) = t_{0.05}(6) = -1.943\}$
 $t^* = -0.4176 \notin C$, *don't reject H_0*

④ 故在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 的情況下，根據樣本資料顯示，我們沒有證據說 $\beta_1 < 0$ ，即不良率對銷售量無顯著負向影響。

(註：題目中的**廣告費用斜率標準**在這題用不到)

高
點
·
高
上

【版權所有，重製必究！】