

《靜力學與材料力學》

洪達+程中鼎老師 主解

- 一、大部分的金屬材料其波松比 (Poisson's ratio) ν 介於 0.25~0.35 之間，且受壓力作用，體積會減小。反之，受拉力作用則體積會變大。今有一線彈性材料，在雙軸應力 (biaxial stress) σ_x 及 σ_y (同為拉應力或壓應力) 作用下，亦滿足上述體積變化行為。若其彈性模數為 E ，波松比為 ν ，試以材料體積變化率，推導證明此材料波松比 ν 的上限值為 0.5 (即 $\nu < 0.5$)。(25 分)

試題評析	等向性材料波松比值會介於 0 至 0.5 間，屬於基本常識。題目已明確指出材料受雙軸向力量作用，因此需先列出公式後再說明其範圍值是否合理，廣義虎克定理是不是超常考的啊！
考點命中	《高點建國「材料力學題庫班」講義》第二回，例題 6.5.16，程中鼎老師編撰。

解：

(一) 寫出廣義虎克定理

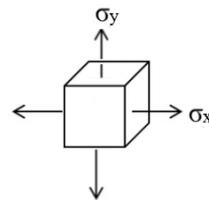
假設有一金屬材料微素受雙軸向拉力作用，其微素所承受拉應力值為

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ ，代入廣義虎克定理求 ϵ_x 、 ϵ_y 及 ϵ_z ：

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma_0}{E} (1 - \nu)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma_0}{E} (1 - \nu)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{-2\nu\sigma_0}{E}$$



(二) 寫出體積應變值並分析波松比上限值

另假設金屬材料體積應變很小，則體積應變 ϵ_v 為

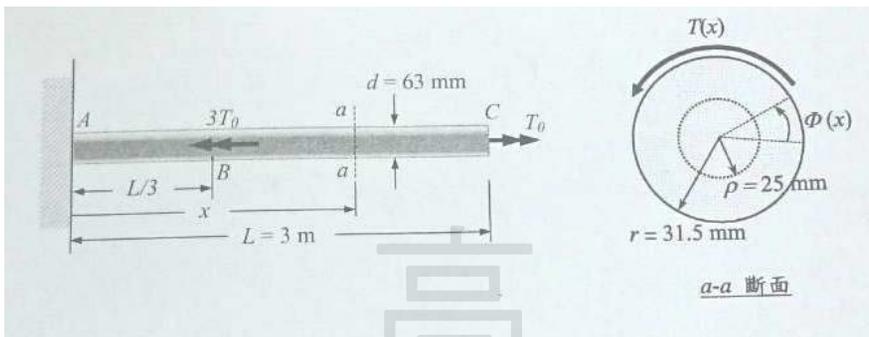
$$\epsilon_v = e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{2\sigma_0}{E} (1 - \nu) - \frac{2\nu\sigma_0}{E} = \frac{2\sigma_0}{E} (1 - 2\nu)$$

起初假設物體受雙軸向拉力作用，因此受力後體積會變大，換句話說體積應變 $\epsilon_v > 0$ 。觀察上式當波松比 $\nu < 0.5$ 情況下體積應變 $\epsilon_v > 0$ ，代表體積變大；當 $\nu = 0.5$ 時則 $\epsilon_v = 0$ ，代表受力後體積不增不減，與題意所述不符；當 $\nu > 0.5$ 時則 $\epsilon_v < 0$ ，代表受拉力後體積反而減小了，與真實物理情況相違背！

綜上所述材料波松比 $\nu < 0.5$ 。

二、圖示 AC 為一等截面圓形實心桿件，其長度為 $L = 3 \text{ m}$ ，直徑 $d = 63 \text{ mm}$ ，彈性模數 $E = 208 \text{ GPa}$ ，波松比 $\nu = 0.3$ 。A 為固定端點，距 A 點 $L/3$ 處 (B 點) 及自由端 (C 點) 分別受 $3T_0$ 及 T_0 的扭矩作用。若在 BC 段 a-a 斷面上內徑 $\rho = 25 \text{ mm}$ 的剪應變 $\gamma_\rho = 250 \mu$ 。試求：

- (一) AC 桿件內最大的剪應力 τ_{\max} 、最大的正向應力 σ_{\max} 及最大的正向應變 ϵ_{\max} 。(15 分)
- (二) 該桿件最大扭轉角 ϕ_{\max} 及自由端之扭轉角 ϕ_C 。(10 分)



試題評析	先將扭矩 T_0 值算出來後即可求出題目所要參數，因整支桿件僅受扭矩作用故應力莫爾圓之圓心會在原點，要算最大正向應力就簡單多了。
考點命中	《高點建國「材料力學題庫班」講義》第一回，例題3.2.6，程中鼎老師編撰。

解：

(一)計算AC桿件內最大剪應力 τ_{\max} 、最大正向應力 σ_{\max} 及最大正向應變 ϵ_{\max}

1.先反推扭矩 T_0 值

$$\text{剪力彈性模數 } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{208}{2(1+0.3)} = 80 \text{ GPa}$$

$$\text{實心圓桿極慣性矩 } J = \frac{\pi^4}{2} = \frac{\pi(31.5)^4}{2} = 1546543.33 \text{ mm}^4$$

$$\text{BC段扭力值 } T_{BC} = T_0$$

桿件BC段a-a斷面上內徑 $\rho = 25 \text{ mm}$ 處的扭轉剪應力

$$\tau_{\rho} = \frac{T_{BC}\rho}{J} = \frac{T_0(25)}{1546543.33} = 16.165T_0 \times 10^{-6} \text{ MPa}$$

已知桿件BC段a-a斷面上內徑 $\rho = 25 \text{ mm}$ 處的剪應變 γ_{ρ} 值，透過剪應力與剪應變關係可得到扭矩 T_0 值：

$$\tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} \Rightarrow 16.165T_0 \times 10^{-6} = (80 \times 10^3)(250 \times 10^{-6}) \Rightarrow \text{可得 } T_0 = 1.237 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

2.計算AC桿件內最大剪應力 τ_{\max} 、最大正向應力 σ_{\max} 及最大正向應變 ϵ_{\max}

AB段扭力值 $T_{AB} = 2T_0$ 大於BC段扭力值 $T_{BC} = T_0$ ，所以桿內最大剪應力 τ_{\max} 會發生在AB段。最大剪應力 τ_{\max} 計算如下：

$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB}r}{J} = \frac{2(1.237 \times 10^6)(31.5)}{1546543.33} = 50.400 \text{ MPa}$$

整支桿件受到純扭矩作用，因此桿內最大正向應力會等於最大剪應力：

$$\sigma_{\max} = \tau_{\max} = 50.400 \text{ MPa}$$

由正向應力與正向應變關係可求得最大正向應變 ϵ_{\max} 值：

$$\epsilon_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{50.400}{208 \times 10^3} - 0.3 \left(\frac{-50.400}{208 \times 10^3} \right) = 0.000315$$

(純剪作用下，斜面45度應力為一正一負)

(二)桿件最大扭轉角 ϕ_{\max} 與自由端扭轉角 ϕ_C

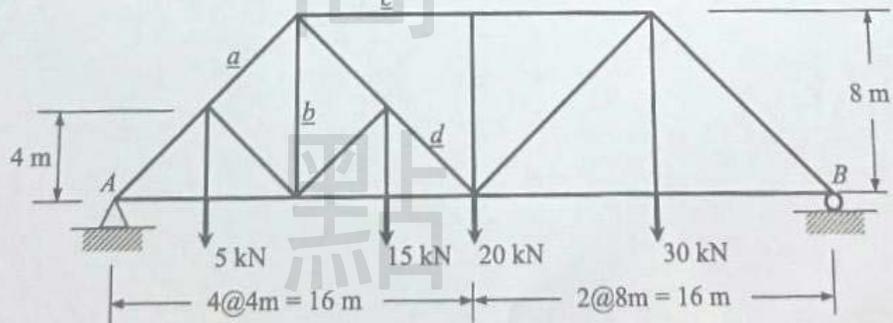
$$\text{桿件AB段扭轉角 } \phi_{AB} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{GJ} = \frac{2(1.237 \times 10^6)(1 \times 10^3)}{(80 \times 10^3)(1546543.33)} = 0.002 \text{ (}\leftarrow\text{)}$$

$$\text{桿件BC段扭轉角 } \phi_{BC} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GJ} = \frac{(1.237 \times 10^6)(2 \times 10^3)}{(80 \times 10^3)(1546543.33)} = 0.002 (\rightarrow)$$

$$\text{桿內最大扭轉角 } \phi_{\max} = 0.002$$

$$\text{自由端扭轉角 } \phi_C = \phi_{AB} + \phi_{BC} = -0.002 + 0.002 = 0$$

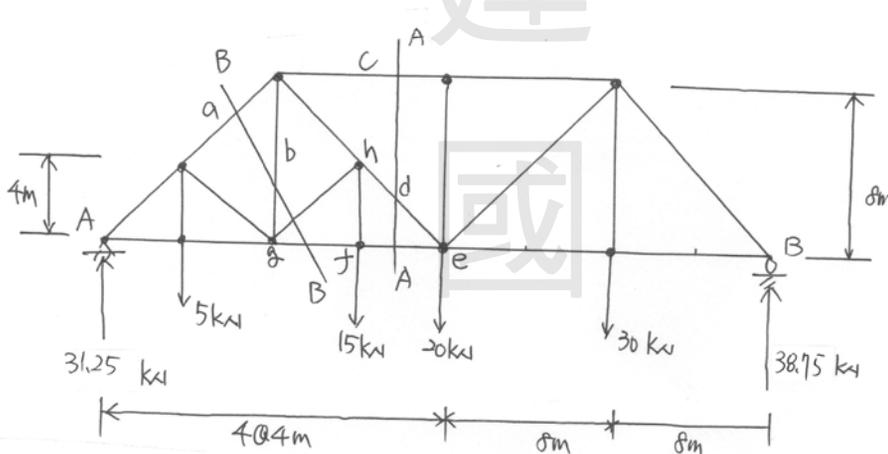
三、請以斷面法求出下示桁架 a、b、c 及 d 桿件之內力。(25 分)



試題評析 靜定簡單桁架利用剖面法分析，屬於基本題型，但計算量有點大。

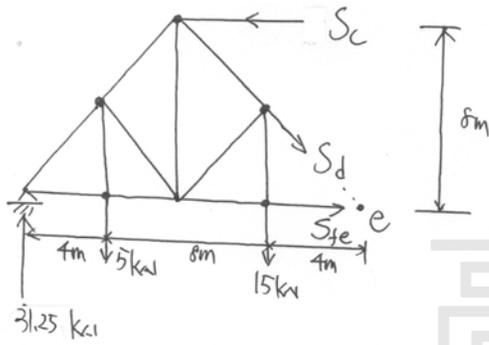
考點命中 《高點建國土木靜力學講義》突破靜力學，2-144頁，洪達老師編撰。

解：



(1) 取 A-A 剖面左側自由體分析：

【版權所有，翻印必究】



$$\sum M_e = 0, \curvearrowright$$

$$S_c(8) + 15 \times 4 + 5 \times 12 - 31.25 \times 16 = 0$$

$$\therefore S_c = 47.5 \text{ (kN)} \text{ (壓)}$$

$$\sum F_y = 0, \downarrow \uparrow$$

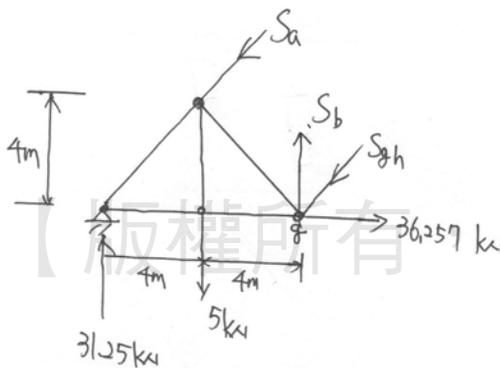
$$\frac{1}{\sqrt{2}} S_d + 5 + 15 - 31.25 = 0 \Rightarrow S_d = 15.9 \text{ (kN)} \text{ (拉)}$$

$$\therefore \sum F_x = 0, \rightarrow \leftarrow$$

$$\therefore S_{je} + \frac{1}{\sqrt{2}} S_d - S_c = 0$$

$$\therefore S_{je} = 36.257 \text{ (kN)} \text{ (拉)}$$

(2) 取 B-B 剖面左側自由體分析:



$$\therefore \sum M_g = 0 \quad (+)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} S_a(4) + \frac{1}{\sqrt{2}} S_a(4) - 31.25 \times 8 + 5 \times 4 = 0$$

$$\therefore S_a = 40.66 \text{ (kN)} \quad (\text{拉})$$

$$\therefore \sum F_x = 0, \quad (+)$$

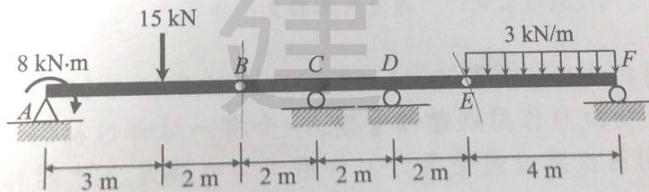
$$\therefore S_a \frac{1}{\sqrt{2}} + S_{gh} \frac{1}{\sqrt{2}} - 36.257 = 0 \quad \therefore S_{gh} = 10.62 \text{ (kN)} \quad (\text{拉})$$

$$\therefore \sum F_y = 0, \quad (+)$$

$$\therefore S_b + 31.25 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_a - \frac{1}{\sqrt{2}} S_{gh} - 5 = 0$$

$$\therefore S_b = 10 \text{ (kN)} \quad (\text{拉})$$

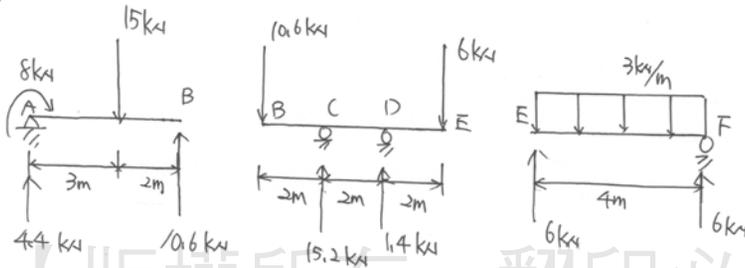
四、下示 AF 梁，B 及 E 點為鉸接 (Hinge)。請求出 A、C、D 及 F 點之反力，並繪出 AF 梁之剪力圖及彎矩圖 (標示相關值或函數)。(25 分)



試題評析	靜定梁剪力彎矩圖，屬於簡單基本題型。
考點命中	《高點建國土木靜力學講義》突破靜力學，2-36頁，洪達老師編撰。

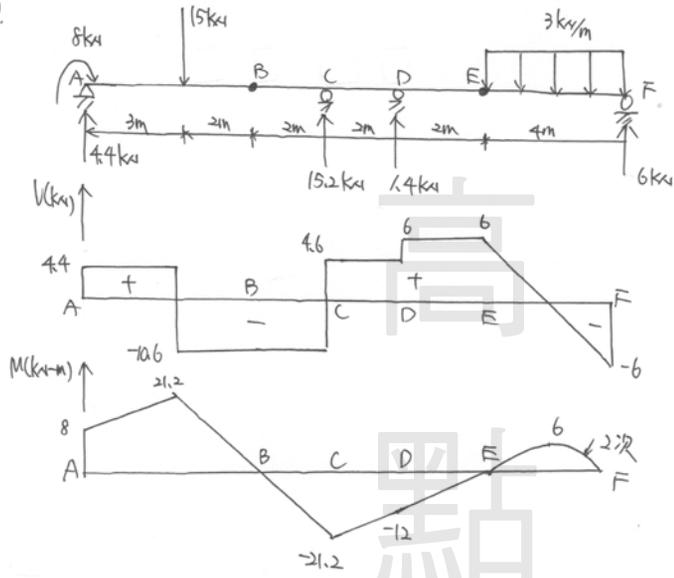
解：

(1)



【版權所有，翻印必究】

(2).



高點
建
國

【版權所有，翻印必究】