《統計學概要》

一、已知隨機變數X的期望值 $E(X)=5$，X的變異數 $V(X)=39$。令 $Y=-6X+3$，試計算：

(一)變異數，$V(-5X-50)$。（5分）

(二)Y的期望值，$E(Y)$。（5分）

(三)Y平方的期望值，$E(Y^2)$。（5分）

(四)共變異數，$Cov(2X,3Y)$。（5分）

(五)相關係數，ρ_{XY}。（5分）

試題評析	本題是隨機變數之動差，屬於基本計算考題，要拿到分數並不難。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第一回，第四章，趙治勳編撰。

答：

(一) $V(-5X-50)=25V(X)=975$

(二) $E(Y)=E(-6X+3)=-6E(X)+3=-27$

(三) $E(Y^2)=V(Y)+[E(Y)]^2=1404+(-27)^2=2133$

其中 $V(Y)=V(-6X+3)=36V(X)=1404$

(四) $Cov(2X,3Y)=(2)(3)Cov(X,Y)=6Cov(X,-6X+3)$

$=6[-6Cov(X,X)+Cov(X,3)]=6[-6V(X)+0]=-36V(X)=-1404$

(五) $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\dfrac{Cov(2X,3Y)/6}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\dfrac{-1404/6}{\sqrt{39}\sqrt{1404}}=-1$

二、大大瘦身公司想知道顧客參加他們的運動計畫後(1)減少的平均體重是否大於3公斤，(2)減少的體重標準差是否超過2公斤，於是自參加瘦身計畫的顧客中隨機抽取6人，其減少的體重如下：

5，1，2，1，1，2　（單位：公斤）

假設減少的體重呈常態分配。

(一)以顯著水準 $\alpha=0.01$ 檢定減少的平均體重是否大於3公斤。（10分）

(二)以顯著水準 $\alpha=0.05$ 檢定減少的體重標準差是否超過2公斤。（10分）

試題評析	本題是考單一母體平均數及變異數之假設檢定，屬於基本考題，要拿到分數並不難。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第四回，趙治勳編撰，頁 11-26。

答：

令 X 表減少之體重(公斤)

母體：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

樣本：$X_1,X_2,\cdots,X_6\overset{iid}{\sim}N(\mu,\sigma^2)$

(一)

點估計：$\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{6})$

$H_0:\mu\le 3 vs H_1:\mu_D>3$

T.S.：$T=\dfrac{\overline{X}-3}{S/\sqrt{6}}\sim t_{(5)}$

R.R.：Reject H_0 at $\alpha=0.01$ if $T^*>t_{(5)0.01}=3.365$

$\because T^*=\dfrac{2-3}{1.549/\sqrt{6}}=-1.581$ $\therefore$ don't reject H_0

我們沒有足夠證據去推論平均體重大於 3 公斤。

(二)

點估計：$S^2=\dfrac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{6-1}$

$H_0:\sigma\le 2 vs H_1:\sigma>2$

T.S.：$\chi^2=\dfrac{(6-1)S^2}{2^2}\sim\chi^2_{(5)}$

R.R.：Reject H_0 at $\alpha=0.05$ if $\chi^2{}^*>\chi^2_{(5)0.05}=11.1$

$\because \chi^2{}^*=\dfrac{(6-1)1.549^2}{2^2}=3$ $\therefore$ don't reject H_0

我們沒有足夠證據去推論標準差大於 2 公斤。

三、一因子完全隨機化（complete randomized）設計中，因子，x，可以是固定的（fixed）或隨機的（random）。假設因子有a水準及n反覆（replicates）：

(一)說明固定因子和隨機因子的差異。（5分）

(二)分別寫出固定效應模式（fixed effects model），隨機效應模式（random effects model）及其假設。令y為反應變數（response variable）。（10分）

(三)以變異數分析方法檢定因子是否顯著時，虛無假設和對立假設為何？請分別就固定因子和隨機因子說明。（10分）

試題評析	本題是考變異數分析中固定效應與隨機效應之比較，屬於冷門題目，但(一)也曾經考過，且也有收錄在講義中。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第四回，第十章，趙治勳編撰。

答：

(一)固定因子：因子之水準是由研究者指定而非隨機選擇，故因子效應為固定之常數。

隨機因子：因子之水準是由研究者從所有可能水準下以隨機方式選擇，故因子效應為隨機變數。

(二)

固定效應模式：$Y_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij}$

假設 $\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$ ， $i=1,2,\cdots,a$ $j=1,2,\cdots,n$

隨機效應模式：$Y_{ij}=\mu+\alpha_{ij}+\varepsilon_{ij}$

假設 $\alpha_{ij}\sim N(0,\sigma^2_\alpha)\perp\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$ ， $i=1,2,\cdots,a$ $j=1,2,\cdots,n$

(三)

固定效應模式：$H_0:\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_a vs H_1:$至少一個$\mu_i\ne\mu_j$

隨機效應模式：$H_0:\sigma^2_\alpha=0 vs H_1:\sigma^2_\alpha>0$

四、假設隨機變數X為燈泡壽命，服從指數分配，且其機率密度函數為：

$$f_X(x)=\lambda e^{\lambda z} \text{，} x \ge 0$$

(一)燈泡壽命超過平均壽命的機率為何？(5分)

(二)假設燈泡平均壽命為100小時，廠商欲控制燈泡在保固期內故障的機率不超過0.1，則保固期應訂多少？(10分)

試題評析	本題為指數分配之事件機率，屬於基本計算考題，要拿到分數並不難。
考點命中	《高點．高上統計學講義》第二回，趙治勳編撰，頁39。

答：

$X \sim Exp(\lambda)$

(一) $P(X>E(X))=P(X>\frac{1}{\lambda})=e^{-\lambda\times\frac{1}{\lambda}}=0.3679$

(二) 令保固期為 a

由題意，$X \sim Exp(\lambda=\frac{1}{100})$ [單位時間：一小時]

$P(X \le a)=0.1 \quad \Rightarrow 1-e^{-\frac{1}{100}\times a}=0.1 \quad \Rightarrow a=10.536$ (小時)

五、8個項目分別為：溫度、性別、智商、體重、距離、所屬學院別、滿意度分數(1,2,3)、教育程度(1.小學 2.中學 3.大學)

(一)那些項目為衡量尺度(measurement scale)中的順序尺度(ordinal scale)？(5分)

(二)那些項目為衡量尺度中的區間尺度(interval scale)？(5分)

(三)那些項目為衡量尺度中的比例尺度(ratio scale)？(5分)

試題評析	本題考敘述統計學中資料尺度，要拿滿分不難。
考點命中	《高點．高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，頁7。

答：

(一)順序尺度：滿意度分數、教育程度。

(二)區間尺度：溫度(^{o}C 或 ^{o}F)。

(三)比例尺度：智商、體重、距離。