

《統計學概要》

一、欲檢測某學院的先修課程的有效性，10位學生在修課前與修課後參加商學概論考試，其成績如下：

學生	前	後
1	530	670
2	690	770
3	910	1,000
4	700	710
5	450	550
6	820	870
7	820	770
8	630	610
9	540	580
10	440	610

(一)就此資料寫出虛無假設與對立假設。(3分)

(二)就(一)之假設，做出相對應的檢定，並做出結論。(12分)

$$t_{18,0.025} = 2.101, \quad t_{19,0.025} = 2.093, \quad t_{9,0.025} = 2.262$$

試題評析 本題是考兩相依母體平均數之假設檢定，屬於基本計算考題，要拿到分數並不難。

考點命中 《高點統計學講義》第四回，趙治勳編撰，頁22。

答：(以題目所提供之查表值推測並非考無母數統計學，且顯著水準 $\alpha = 0.025$)

令 X, Y 分別表修課前與修課後之成績

$$\text{令 } D = X - Y$$

假設 $D = X - Y \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 及隨機樣本

$$(一) H_0: \mu_D \geq 0 \text{ vs } H_1: \mu_D < 0$$

(二)

$$\text{母體: } D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$$

$$\text{樣本: } D_1, D_2, \dots, D_{10} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_D, \sigma_D^2)$$

$$\text{點估計: } \bar{D} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{10}\right)$$

$$H_0: \mu_D \geq 0 \text{ vs } H_1: \mu_D < 0$$

$$\text{T.S.: } T = \frac{\bar{D} - 0}{S_D / \sqrt{10}} \sim t_{(9)}$$

【版權所有，重製必究！】

$$\text{R.R.: Reject } H_0 \text{ at } \alpha = 0.025 \text{ if } T^* < -t_{(9)0.025} = -2.262$$

$$\therefore T^* = \frac{-61 - 0}{69.033 / \sqrt{10}} = -2.794 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

我們有足夠證據去推論先修課程是有效的。

二、在某一生產過程中，金屬的硬度受溫度的影響。今蒐集10筆資料如下：

溫度x	100	200	300	400	450	500	550	600	650	700
硬度y	4	5	4	5	5.5	6	6	7	7.5	7

(一)寫出簡單線性迴歸模型式及假設。(5分)

(二)求斜率的最小平方估計值。(6分)

(三)計算此模型下的變異數分析表(ANOVA)並解釋其結果(包括假設檢定)。(12分)

(四)求 $\beta_0 + 500\beta_1$ 的估計值及95%的信賴區間。(6分)

$$t_{9,0.025} = 2.262, \quad t_{8,0.025} = 2.306, \quad t_{7,0.025} = 2.365$$

試題評析 本題是考簡單迴歸，屬於基本考題，要拿到分數並不難。

考點命中 《迴歸分析熱門題庫》與高點補充講義，趙治勳編撰。

答：

$$\sum X_i = 4450, \sum X_i^2 = 2327500, \sum Y_i = 57, \sum Y_i^2 = 338.5, \sum X_i Y_i = 27350$$

$$SS_{XY} = \sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n} = 1985, \quad SS_X = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} = 347250,$$

$$SS_Y = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} = 13.6$$

(一)模型： $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

假設： $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

$$(二) \hat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{1985}{347250} = 0.005716$$

$$(三) SSR = \hat{\beta}_1^2 SS_X = 0.005716^2 \times 347250 = 11.3456, \quad SST = SS_Y = 13.6$$

ANOVA TABLE				
source	SS	d.f.	MS	F
Reg	11.3456	1	11.3456	$F^* = 40.2612$
Error	2.2544	8	0.2818	
Total	13.6	9		

(四) $Y|_{x_0=500} = \beta_0 + 500\beta_1$ 之估計值為 $\hat{Y}|_{x_0=500} = \hat{\beta}_0 + 500\hat{\beta}_1 = 6.01438$

$$\text{其中 } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 3.15638$$

$Y|_{x_0=500} = \beta_0 + 500\beta_1$ 之 95% 信賴區間為

$$\begin{aligned} & (\hat{Y}|_{x_0=500} \pm t_{(8)0.025} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{SS_X}\right) MSE}) \\ & = (6.01438 \pm 2.306 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(500 - 445)^2}{347250}\right) 0.2818}) = (4.72537, 7.30338) \end{aligned}$$

三、某書店在每30分鐘內顧客出現的人次數服從 $\lambda = 5$ 的波松(poisson)分配。回答下列問題：

(一)在60分鐘內有12位顧客光臨的機率？(5分)

- (二)在兩小時內的顧客平均數，變異數為何？(8分)
 (三)估計在多長的時間，平均顧客數可達到100位。(6分)

試題評析	本題是考Poisson分配之事件機率計算題，屬於基本考題，要拿到分數並不難。
考點命中	《高點統計學講義》第二回，趙治勳編撰，頁24。

答：

令 $N(t)$ 表在 t 倍30分鐘內顧客出現之人數

$$N(t) \sim \text{Poisson}(5t)$$

$$(一) P(N(t=2)=12) = \frac{e^{-(5)(2)} ((5)(2))^{12}}{12!} = 0.09478$$

$$(二) E[N(t=4)] = V[N(t=4)] = 5 \times 4 = 20$$

$$(三) \text{令 } E[N(t)] = 5t = 100 \Rightarrow t = 20$$

\therefore 在10小時($t=20$ 倍個30分鐘)下，平均顧客數可達到100位

四、某學院院長想要比較會計系和經濟系的研究生在畢業時就取得工作的比例。隨機抽取各100位會計系和經濟系的畢業生，其中經濟系畢業生有52位，會計系畢業生有65位已經在畢業時就獲得就業機會。回答下列問題：

- (一)寫出虛無假設與對立假設。(6分)
 (二)完整地計算(一)的檢定，在顯著水準為5%下陳述結論。(15分)

試題評析	本題是考兩獨立母體成功比例差之假設檢定，屬於基本計算考題，要拿到分數並不難。
考點命中	《高點統計學講義》第四回，趙治勳編撰，頁31。

答：令 X_1, X_2 分別表會計系與經濟系研究生在畢業時就取得工作

假設 $X_1 \perp X_2$

母體： $X_1 \sim \text{Ber}(p_1) \perp X_2 \sim \text{Ber}(p_2)$

樣本： $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1100} \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p_1) \perp X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2100} \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p_2)$

點估計： $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \underset{\text{by C.L.T.}}{\sim} N(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{100} + \frac{p_2(1-p_2)}{100})$

$$H_0: p_1 = p_2 \text{ vs } H_1: p_1 \neq p_2$$

$$\text{T.S.: } Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (0)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} \underset{\text{by C.L.T.}}{\sim} N(0,1) \quad \text{其中 } \hat{p} = \frac{65+52}{100+100} = 0.585$$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha = 0.05$ if $|Z^*| > z_{0.025} = 1.96$

$$\therefore Z^* = \frac{\left(\frac{65}{100} - \frac{52}{100}\right) - (0)}{\sqrt{0.585(1-0.585)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 1.8656 \quad \therefore \text{don't reject } H_0$$

我們沒有足夠證據去推論會計系與經濟系研究生在畢業時就取得工作之比例有差異

五、回答下列問題：

- (一)何謂統計量？(4分)
- (二)何謂抽樣分配？(4分)
- (三)敘明中央極限定理。(8分)

試題評析	本題是考名詞解釋，上課講義中都有特別註明會考解釋名詞，要拿到分數並不難。
考點命中	《高點統計學講義》第二回；第七章，趙治勳編撰。

答：

- (一)樣本所組成的函數，且未含母體未知參數。
- (二)統計量所服從之機率分配。
- (三)不論母體分配為何，其平均數及變異數均存在，只要有隨機樣本且樣本數夠大，由樣本線性組合下，統計量之抽樣分配會迫近常態分配。

【版權所有，重製必究！】