# 《統計學》

一、常態分配（Normal distribution）其平均數為0，變異數為$\sigma^2$，機率密度函數為 $f(x|\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x)^2}{2\sigma^2}\right)$。從中隨機抽取n個隨機樣本，$X_1,X_2,\ldots,X_n$。

(一)虛無假設與對立假設分別為$H_0:\sigma=\sigma_0$和$H_1:\sigma>\sigma_0$，求齊一最強檢力檢定（uniformly most powerful test）。（13分）

(二)由(一)所得的檢定，將其檢力函數以卡方分配函數呈現。（10分）

| 試題評析 | 本題是考UMPT，在數統加強的課程中老師已經有幫同學加強過，且這一題課本也有一樣的範例，只要同學有唸到就可以輕易拿到分數。 |
|---|---|
| 考點命中 | 《迴歸分析熱門題庫2016版》，高點出版，趙治勳編撰，頁1-91例2。 |

**答**：

(一) $H_0:\sigma=\sigma_0$ vs $H_1:\sigma>\sigma_0(=\sigma_1)$

$$令\ \lambda=\frac{L(\sigma=\sigma_0)}{L(\sigma=\sigma_1)}=\frac{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0})^n e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma_0^2}}}{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1})^n e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma_1^2}}}=(\frac{\sigma_1}{\sigma_0})^n e^{-\frac{\sum x_i^2}{2}(\frac{1}{\sigma_o^2}-\frac{1}{\sigma_1^2})}\le k$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2\ge k'$$

假設顯著水準為$\alpha$

$$\alpha=P(\sum_{i=1}^n X_i^2\ge c\,|\,\sigma=\sigma_0)\quad 其中\ \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0 is true}{\sim}\chi^2_{(n)}$$

$$=P(\chi^2_{(n)}\ge\frac{c}{\sigma_0^2})$$

$$\Rightarrow\frac{c}{\sigma_0^2}=\chi^2_{(n)\alpha}\Rightarrow c=\sigma_0^2\chi^2_{(n)\alpha}$$

由 Neyman-Pearson Lemma，

$\therefore C=\{\sum_{i=1}^n x_i^2\,|\,\sum_{i=1}^n x_i^2\ge\sigma_0^2\chi^2_{(n)\alpha}\}$ 為在檢定水準$\alpha$下$H_0:\sigma=\sigma_0$ vs $H_1:\sigma>\sigma_0$之 UMPT

(二) $$power(\sigma)=P(\sum_{i=1}^n X_i^2\ge\sigma_o^2\chi^2_{(n)\alpha}\,|\,\sigma)=P(\chi^2_{(n)}\ge\frac{\sigma_o^2}{\sigma^2}\chi^2_{(n)\alpha}\,|\,\sigma)$$



$$=1-P(\chi^2_{(n)}<\frac{\sigma_o^2}{\sigma^2}\chi^2_{(n)\alpha}\,|\,\sigma)$$

$$=1-\Phi(\frac{\sigma_o^2}{\sigma^2}\chi^2_{(n)\alpha})$$ 其中$\Phi(\bullet)$表示$\chi^2_{(n)}$之累積分配函數

二、某投資客購買A股100張，B股150張，令X代表A股的獲利而Y代表B般的獲利。假設(X, Y)的聯合分配是齊一（uniform）分布於$-2\le x\le 4$，$-1\le y-x\le 1$。

(一)求X和Y的邊際機率密度函數。（12分）

(二)求X和Y的期望值。（10分）

(三)求投資客的獲利期望值。（5分）

| | |
|---|---|
| 試題評析 | 本題是考二元均勻分配，課本中也有相關例題，只是中間數學運算過程有點繁瑣，考生務必要小心計算。 |
| 考點命中 | 《高點・高上統計學講義第二回》，趙治勳編撰，頁37。 |

**答**：

$(X,Y)\sim Uniform(-2\le x\le 4,-1\le y-x\le 1)$

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{12},-2\le x\le 4,-1\le y-x\le 1$$

(一) $f_X(x)=\int_{x-1}^{1-x} f_{XY}(x,y)dy=\frac{1}{6}(1-x),-2\le x\le 4$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-2}^{y+1} f_{XY}(x,y)dy=\frac{y+3}{12},-3\le y<-1\\ \int_{y-1}^{y+1} f_{XY}(x,y)dy=\frac{1}{6},-1\le y<3\\ \int_{y-1}^{4} f_{XY}(x,y)dy=\frac{5-y}{12},3\le y\le 5\end{cases}$$

(二) $E(X)=\int_{-2}^{4} x\frac{1}{6}(1-x)dx=-3$

$$E(Y)=\int_{-3}^{-1} y\frac{y+3}{12}dy+\int_{-1}^{3} y\frac{1}{6}dy+\int_{3}^{5} y\frac{5-y}{12}dy=1$$

(三) $E(100X+150Y)=100E(X)+150E(Y)=-150$

三、常態分配（Normal distribution）其平均數為$\mu$，變異數為$\sigma_0^2$（已知），機率密度函數為$f(x|\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right)$。從中隨機抽取n個隨機樣本，$X_1,X_2,\ldots,X_n$，且假設$\mu$的先驗分配（prior distribution）為常態分配而母體均數是$\alpha_0$，變異數為$\beta_0$，$\alpha_0$和$\beta_0$。為已知的常數。試求：

(一)求$\mu|x$的事後分配（posterior distribution）。（12分）

(二)利用損失函數為誤差平方，求$\mu$的貝氏估計式（Bayes estimator）。（10分）



| | |
|---|---|
| 試題評析 | 本題是考貝氏估計量，屬於國考中不常見之題型，但在數統加強的課程中老師已經有幫同學加強過，且這一題課本也有一樣的範例，只要同學有唸到就可以輕易拿到分數。 |
| 考點命中 | 《迴歸分析熱門題庫2016版》，高點出版，趙治勳編撰，頁1-8例7。 |

**答**：

$X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma_0^2)$

條件分配 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid \mu) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}})^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}$

事前分配 $\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_0}} e^{-\frac{(\mu-\alpha_0)^2}{2\beta_0}}$

聯合分配 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n, \mu) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}})^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_0}} e^{-\frac{(\mu-\alpha_0)^2}{2\beta_0}}$

邊際分配

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int f(x_1, x_2, \cdots, x_n, \mu) d\mu$

事後分配 $\pi(\mu \mid x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n, \mu)}{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma_0^2\beta_0}{n\beta_0+\sigma_0^2}}} \exp\{-\frac{(\mu - \frac{\sigma_0^2\alpha_0 + n\beta_0\bar{x}}{n\beta_0+\sigma_0^2})^2}{2\frac{\sigma_0^2\beta_0}{n\beta_0+\sigma_0^2}}\}$$

因此，$\mu \mid x_1, \cdots, x_n \sim N(\frac{\sigma_0^2\alpha_0 + n\beta_0\bar{x}}{n\beta_0+\sigma_0^2}, \frac{\sigma_0^2\beta_0}{n\beta_0+\sigma_0^2})$

在誤差平方(二次)損失函數下，

$\hat{\mu}_{Bayes} = E(\mu \mid x_1, \cdots, x_n) = \frac{\sigma_0^2\alpha_0 + n\beta_0\bar{x}}{n\beta_0+\sigma_0^2}$ 即為 $\mu$ 之貝氏估計量

四、隨機自某公司抽取7個員工，他們每個月的薪水與儲蓄資料（單位：萬元）如下表所列：

| 員工 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 戊 | 己 | 庚 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 薪資收入x | 8 | 11 | 9 | 6 | 6 | 8 | 7 |
| 儲蓄y | 1.5 | 2.2 | 1.6 | 0.7 | 0.8 | 1.3 | 1.0 |

(一)迴歸係數（斜率）估計值為何？（6分）

(二)求迴歸係數（斜率）之估計標準誤（standard error of estimate）。（6分）



(三)求母體迴歸係數（斜率）之95%信賴區間。（6分）

(四)檢定 $\beta_0 + 6\beta_1 = 1$ 之說法並解釋 $\beta_0 + 6\beta_1 = 1$ 之意義。（$\alpha = 0.05$）（10分）

| | |
|---|---|
| **試題評析** | 本題是考簡迴歸，屬於基本計算考題，要拿到分數並不難。 |
| **考點命中** | 《迴歸分析熱門題庫2016版》，高點出版，趙治勳編撰，第二篇第三章。 |

**答**：

$\sum X_i = 55$，$\sum X_i^2 = 451$，$\sum Y_i = 9.1$，$\sum Y_i^2 = 13.47$，$\sum X_i Y_i = 77$

$SS_{XY} = 5.5$　$SS_X = 18.8571$　$SS_Y = 1.64$

假設迴歸模型：$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)\ i = 1,2,\cdots,7$

(一) $\hat{\beta}_1 = \dfrac{SS_{XY}}{SS_X} = 0.2917$

(二) $S(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\dfrac{MSE}{SS_X}} = 0.0194$

其中 $MSE = \dfrac{SSE}{n-2} = \dfrac{SS_Y - \hat{\beta}_1^2 SS_X}{7-2} = 0.007094$

(三) $\beta_1$ 之95%信賴區間為

$(\hat{\beta}_1 \pm t_{(5)0.025} S(\hat{\beta}_1)) = (0.2418, 0.3416)$

(四) $E(Y \mid x = 6) = \beta_0 + 6\beta_1$ 之 95%信賴區間為

$$(\hat{\beta}_0 + 6\hat{\beta}_1 \pm t_{(5)0.025}\sqrt{(\frac{1}{n} + \frac{(6-\bar{x})^2}{SS_X})MSE})$$

$$= ((-0.992) + 6(0.2917) \pm 2.571\sqrt{(\frac{1}{7} + \frac{(6-7.857)^2}{18.8571})0.007094})$$

$$= (0.6346, 0.8818)$$

由於 $E(Y \mid x = 6)$ 之 95%信賴區間未包含 1，故採拒絕 $H_0 : \beta_0 + 6\beta_1 = 1$ 之決策

$\beta_0 + 6\beta_1 = 1$ 意義：

當自變數為 6 時，母體迴歸線上之對應值為 1 ( $E(Y \mid x = 6) = 1$ )