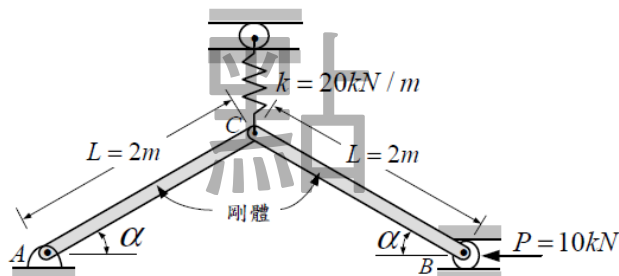


# 《靜力學與材料力學》

洪達、程中鼎老師 主解

- 一、圖一之結構由長度  $L = 2\text{ m}$  之剛性桿件  $AC$  及  $BC$  所組成，在  $C$  點連接一彈簧。在  $\alpha = 0^\circ$  時，彈簧未伸長或縮短；當施加外力  $P = 10\text{ kN}$  於  $B$  點時，結構之變形如圖一所示。設彈簧之彈力常數為  $k = 20\text{ kN/m}$ 。以能量法 (Energy Method) 求平衡時之角度  $\alpha$ ，並判斷平衡時是為穩定平衡、不穩定平衡或隨遇平衡。(25 分)



圖一

**試題評析** 利用最小總位能原理求解及判斷穩定性，屬於基本題型。

**考點命中** 《突破靜力學經典題型解析》，高點文化出版，洪達老師編著，p4-55，例題25。

解：

(1)

∵ 系統之總位能：

$$V = \frac{1}{2} K(L \sin \alpha)^2 - P2L(1 - \cos \alpha)$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow K(L^2 \sin \alpha)(\cos \alpha) - 2PL \sin \alpha = 0$$

$$\therefore KL \cos \alpha - 2P = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{2P}{kL} = \frac{2 \times 10}{20 \times 2}$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ$$

(2)

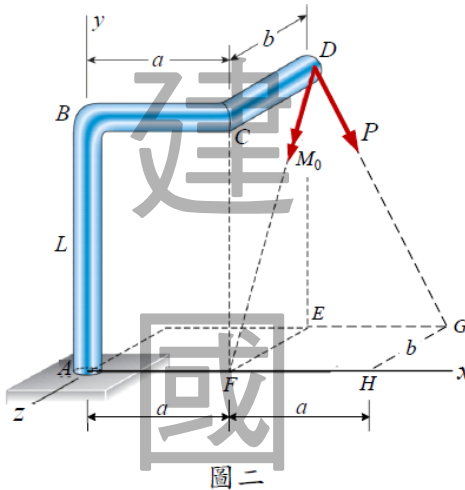
$$\therefore \frac{\partial V}{\partial \alpha} = kL^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2PL \sin \alpha$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = kL^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2PL \sin \alpha$$

將 $\alpha=60^\circ$ 代入上式中得

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = (20)(2)^2(-0.5) - 2 \times 10 \times 2(0.5) < 0 \Rightarrow \text{不穩定平衡}$$

二、托架 ABCD 是由垂直桿 AB ( $L=2\text{ m}$ )、平行於 x 軸之 BC 桿 ( $a=1.2\text{ m}$ ) 及平行於 z 軸之 CD 桿 ( $b=0.8\text{ m}$ ) 所組成，如圖二所示。外力  $P=15\text{ kN}$  作用於 D 點指向 G 點；力矩  $M_0=2\text{ kN}\cdot\text{m}$  作用於 D 點指向 F 點。求在 A 點截面上的軸力大小、剪力大小、彎矩大小及扭矩大小。(25 分)



圖二

**試題評析** 屬於向量力學，基本題型。

**考點命中** 《突破靜力學經典題型解析》，高點文化出版，洪達老師編著，p1-15，例題7。

解：

(1)

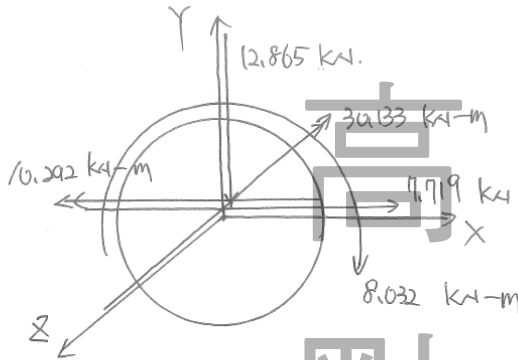
$$\vec{M}_0 = 2 \left( -\frac{2}{2.154} \vec{j} + \frac{0.8}{2.154} \vec{k} \right) = 1.857 \vec{j} + 0.7428 \vec{k} \text{ (k}\cdot\text{m)}$$

$$\vec{P} = 15 \left( \frac{1.2}{2.332} \vec{i} - \frac{2}{2.332} \vec{j} \right) = 7.719 \vec{i} - 12.865 \vec{j} \text{ (kN)}$$

$$\vec{r}_{D/A} = 1.2 \vec{i} + 2 \vec{j} - 0.8 \vec{k} \text{ (m)}$$

$$\therefore \vec{M}_A = \vec{r}_{O/A} \times \vec{P} + \vec{M}_0 = -10.292 \vec{i} - 8.032 \vec{j} - 30.133 \vec{k} \text{ (kN-m)}$$

(2)



$$\text{軸力} = 12.865 \text{ kN (T)}$$

$$\text{剪力} = 7.719 \text{ kN (}\rightarrow\text{)}$$

$$M_x = 10.292 \text{ kN-m (}\leftarrow\text{)}$$

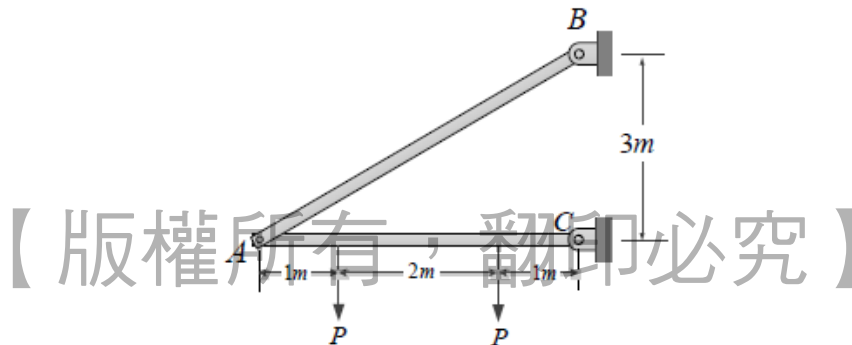
$$M_z = 30.133 \text{ kN-m (}\uparrow\text{)}$$

$$\text{扭矩} = 8.032 \text{ kN-m}$$

三、圖三中，桿件  $AB$  及  $AC$  為截面積  $A = 36 \text{ mm}^2$  之等截面圓形桿件，其應力~應變關係為：

$$\sigma = \frac{104,000\varepsilon}{1 + 200\varepsilon} \text{ for } 0 \leq \varepsilon \leq 0.03 \text{ (}\sigma \text{ 的單位為 MPa)}$$

若桿件  $AB$  及  $AC$  之允許拉應力或壓應力均為 0.2% 偏距降伏應力 (offset yield stress)，求允許載重  $P_{allow}$ 。(25 分)



圖三

## 試題評析

本題為軸力非彈性分析題型，與102年結構技師題目觀念雷同，但計算量相對簡單許多。算完桿件內力後再求出容許應力，最後即可反求允許載重值。

**考點命中** 《高點建國材料力學題庫班講義》，程中鼎老師編撰，例題10.5(P.191)。

解：

解：

1. 先計算各桿件內力及應力

取自由體圖如右，對 C 點取力矩和為零

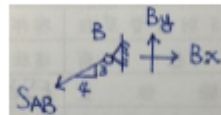
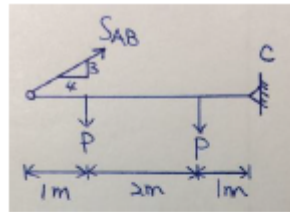
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow S_{AB} \left(\frac{3}{5}\right)(4) = P(3+1) \Rightarrow S_{AB} = \frac{5P}{3} \text{ (拉力)}$$

將 B 點鉸支承單獨拿出來分析，可得 B 點反力

$$B_x = \frac{4P}{3} \text{ (→)}, B_y = P \text{ (↑)}$$

由整體水平及垂直方向力平衡可得 C 點反力

$$C_x = \frac{4P}{3} \text{ (←)}, B_y = P \text{ (↑)}$$



對於 AB 桿件其承受的應力為  $\sigma_{AB} = \frac{(5P/3)}{A} = \frac{(5P/3)}{36} = 0.0463P$

對於 AC 桿件其承受軸力值  $S_{AC} = C_x = 4P/3$  (壓力) 外，尚有因剪力 P 造成桿件內有最大彎矩值  $M = P(1m) = 1000P \text{ N}\cdot\text{mm}$  作用，故 AC 桿件承受的應力  $\sigma_{AC}$

$$\sigma_{AC} = \frac{(4P/3)}{A} + \frac{M}{S} = \frac{(4P/3)}{36} + \frac{1000P}{30.466} = 32.86P$$

其中斷面模數 S 值之計算，從桿件斷面積  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 36 \text{ mm}^2 \Rightarrow$  直徑  $d = 6.77 \text{ mm}$

$$\text{斷面模數 } S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi (6.77)^3}{32} = 30.463 \text{ mm}^3$$

因此兩桿最大應力為  $\sigma_{\max} = \max(\sigma_{AB}, \sigma_{AC}) = 32.86P$

2. 計算容許(允許)拉壓應力

依據題意容許拉壓應力為 0.2% 偏距降伏應力，我們先將題目所給應力應變關係式對應變  $\epsilon$  微分

$$\Rightarrow \sigma' = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{104000(1+200\epsilon) - 104000\epsilon(200)}{(1+200\epsilon)^2} = \frac{104000}{(1+200\epsilon)^2}$$

因此初始斜率值 ( $\epsilon = 0$ ) 為  $\sigma'(0) = 104000 \text{ MPa}$ 。位於應變值  $\epsilon = 0.2\% = 0.002$  處且平行於初始斜率之方程式為  $104000(\epsilon - 0.002)$ ，此方程式與題目所給非線性方程式相交之點所對應的應變值  $\epsilon$  為

$$104000(\epsilon - 0.002) = \frac{104000\epsilon}{1+200\epsilon} \Rightarrow \text{可解 } \epsilon = 0.00432$$

將  $\epsilon = 0.00432$  再代回題目所給非線性方程式曲線，可得到 0.2% 偏距法所對應之降伏應力值  $\sigma_{y=0.2\%}$

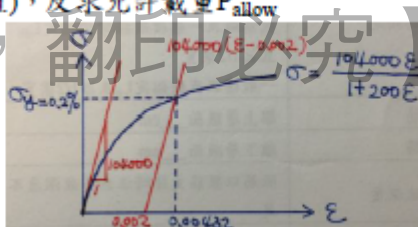
$$\sigma_{y=0.2\%} = \sigma(\epsilon = 0.00432) = \frac{104000(0.00432)}{1+200 \times 0.00432} = 241.030 \text{ MPa}$$

3. 反求允許載重  $P_{\text{allow}}$

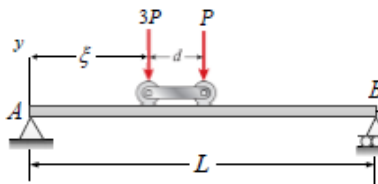
由最大應力  $\leq 0.2\%$  偏距降伏應力值(容許應力值)，反求允許載重  $P_{\text{allow}}$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} \leq \sigma_{y=0.2\%} \Rightarrow 32.86P \leq 241.030$$

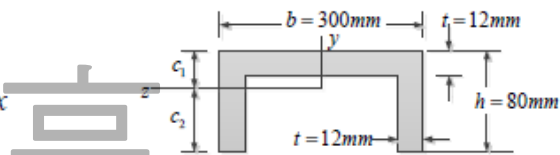
$$\Rightarrow \text{允許載重 } P_{\text{allow}} = 7.335 \text{ N}$$



四、圖四(a)之簡支梁  $AB$ ，承受相連兩輪之載重，此載重可移到任何位置（即圖四(a)中的  $\xi$  為任意值）。梁  $AB$  之截面如圖四(b)所示。設  $P = 2 \text{ kN}$ ， $L = 10 \text{ m}$ ， $d = 1.5 \text{ m}$ 。求此移動載重造成梁內之最大拉應力，及其所在位置。（25分）



圖四(a)



圖四(b)

試題評析	本題融合結構學影響線觀念與材力撓曲應力觀念合併考，算是出的恰到好處。對於簡支梁上有兩輪移動載重，要找出最大彎矩值是非常容易的；計算斷面形心與慣性矩值是基本功夫，千萬不可粗心大意。
考點命中	《高點建國材料力學題庫班講義》，程中鼎老師編撰，例題4.10(P.46)。

解：

1. 計算移動載重下梁內最大彎矩值

當移動載重只有兩輪的情況下，要計算簡支梁最大絕對彎矩是非常容易的。首先把兩輪載重  $3P$  與  $P$  的合力作用線  $\Sigma = 3P + P = 4P$ ，與最重輪重  $(3P)$  分別放在簡支梁中線兩側，此時梁內絕對最大彎矩會發生在最重輪  $3P$  底下。先計算此合力作用線位置(與最重輪之距離)：

$$\bar{x} = \frac{3P(0) + P(d)}{3P + P} = \frac{d}{4} = \frac{1.5}{4} = 0.375 \text{ m}$$

代表合力作用線  $\Sigma$  與最重輪之距離為  $\bar{x} = 0.375 \text{ m}$ ，因此合力作用線與最重輪重  $(3P)$  分別放在簡支梁中線兩側，其各自距簡支梁中線距離為

$$\bar{x}/2 = 0.375/2 = 0.1875 \text{ m}.$$

梁內絕對最大彎矩會發生在最重輪重  $(3P)$  之處，其與 A 點距離  $\xi$  為  $\xi = L/2 - \bar{x}/2 = 10/2 - 0.1875 = 4.8125 \text{ m}$

$$A \text{ 點反力 } R_A = \frac{\Sigma(L/2 - \bar{x}/2)}{L} = \frac{4(2)(5 - 0.1875)}{10} = 3.85 \text{ kN} (\uparrow)$$

梁內最大彎矩值  $M_{\max} = R_A \xi = 3.85(4.8125) = 18.528 \text{ kN}\cdot\text{m}$  (正彎矩)

正彎矩代表受拉側在中性軸(N.A.)以下，或者稱梁下緣受拉。

2. 計算梁內最大(撓曲)拉應力

$$\text{形心 } \bar{y} (\text{距梁底}) = \frac{(68 \times 24)(34) + (300 \times 12)(74)}{68 \times 24 + 300 \times 12} = 61.523 \text{ mm}$$

$$\text{慣性矩 } I_z = \frac{1}{3} (24 \times 61.523^3 + 300 \times 18.477^3 - 276 \times 6.477^3) = 2468761.248 \text{ mm}^4$$

$$\text{最大撓曲拉應力 } \sigma_{\max,t} = \frac{M_{\max} \bar{y}}{I_z} = \frac{(18.528 \times 10^6)(61.523)}{2468761.248} = 461.729 \text{ MPa}$$

總結以上，在此移動載重下梁內最大撓曲拉應力為  $461.729 \text{ MPa}$ ，發生在距 A 點鉸支承處  $\xi = 4.8125 \text{ m}$  且斷面最下緣之點。

