《統計學》

一、設一批12部裝之電視中有3部有瑕疵，今隨機抽出3部檢驗，若令隨機變數X為檢驗出之良品數，並且當「3部均為良品時，整批接受；否則退貨」。

(一)若採抽驗後不放回方式，試寫出X之機率分配式、平均數及變異數；並求整批電視機被接受之機率為何？(8分)

(二)若採抽驗後放回方式，試寫出X之機率分配式、平均數及變異數；並求整批電視機被接受之機率為何？(8分)

(三)若採抽驗後不放回方式，試求在第3次檢驗中始驗出第1部有瑕疵電視機之機率為何？(4分)

試題評析	本題是二項分配與超幾個分配之相關考題，只要考生清楚瞭解兩個分配的異同處，拿滿分不難。
考點命中	《高點・高上統計學講義第三回》，趙治勳編撰，頁17<註>。

答：

(一) $X \sim Hyper(N=12, m=9, n=3)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{9}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{12}{3}}, & x=0,1,2,3\\ 0 & ,o.w.\end{cases}$$

$$E(X)=n\frac{m}{N}=3\times\frac{9}{12}=2.25$$

$$V(X)=n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})(\frac{N-n}{N-1})=3\times\frac{9}{12}(1-\frac{9}{12})(\frac{12-3}{12-1})=0.4602$$

$$P(\text{整批電視被接受})=P(X=3)=\frac{\binom{9}{3}\binom{3}{0}}{\binom{12}{3}}=0.3818$$

(二) $X \sim Bin(n=3, p=0.75)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\binom{3}{x}0.75^x 0.25^{3-x}, & x=0,1,2,3\\ 0 & ,o.w.\end{cases}$$

$$E(X)=np=3\times 0.75=2.25$$

$$V(X)=np(1-p)=3\times 0.75(1-0.75)=0.5625$$

$$P(\text{整批電視被接受})=P(X=3)=\binom{3}{3}0.75^3 0.25^{3-3}=0.421875$$

(三) $P(\text{第3次檢驗中始驗出第1部有瑕疵電視})=\dfrac{9}{12}\times\dfrac{8}{11}\times\dfrac{3}{10}=0.1636$

二、自母數為λ之卜瓦松分配（Poisson Distribution）抽出一大小為n的隨機樣本$X_1,X_2,\ldots,X_n$，以估計此一未知母數λ。

(一)試據動差法（Method of Moments）求λ之估計量。（6分）

(二)試據最概法（Method of Maximum Likelihood）求λ之最概估計量（Maximum Likelihood Estimator）$\hat{\lambda}_{MLE}$。（6分）

(三)驗證$\hat{\lambda}_{MLE}$是否符合優良點估計量之一致性（Consistency）及充分性（Sufficiency）。（8分）

試題評析	本題是點估計量之尋找及評估準則之相關考題，所有題目在課本中都有，拿滿分不難。
考點命中	(一)《高點・高上統計學講義第四回》，趙治勳編撰，頁49例5。 (二)《高點・高上統計學講義第四回》，趙治勳編撰，頁51。 (三)《高點・高上統計學講義第四回》，趙治勳編撰，頁67例13。 《迴歸分析熱門題庫》，高點文化出版，趙治勳編撰，頁1-43例4(2)。

答：

$$X_1,X_2,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} Poisson(\lambda)$$

(一) 令 $E(X)=\lambda=\overline{X}$

$\therefore \hat{\lambda}_{MME}=\overline{X}$ 為λ之MME

(二) $$L(\lambda)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

$$\ln L(\lambda)=-n\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i!\right)$$

令 $\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$ 且 $\dfrac{d^2\ln L(\lambda)}{d\lambda^2}<0$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{MLE}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x}$$

$\therefore \hat{\lambda}_{MLE}=\overline{X}$ 為λ之MLE

(三) $E(\hat{\lambda}_{MLE})=E(\overline{X})=\lambda$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}V(\hat{\lambda}_{MLE})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda}{n}=0$

$\therefore \hat{\lambda}_{MLE}=\overline{X}$ 為λ之一致性估計量

$$S=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Possion(n\lambda)$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid s;\lambda)=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n,s;\lambda)}{g(s;\lambda)}=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)}{g(s;\lambda)}$$

$$= \frac{\dfrac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!}}{\dfrac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^s}{s!}} = \frac{s!}{n^s \prod x_i!}$$ 與 λ 無關

得知 $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 為 λ 之充分統計量,再由充分統計量之不變性得知

$\hat{\lambda}_{MLE}=\overline{X}$ 也為 λ 之充分估計量

三、設隨機變數X表一商品上升之價格（元），Y表該商品銷售量降低之百分比（%），其聯合機率分配如下表：

x \ y	10	20	30
5	0.1	0.2	0.1
10	0.1	0.1	0.1
15	0.1	0.1	0.1

(一)求X之邊際機率分配。（4分）

(二)求 μ_x 及 σ_x^2。（8分）

(三)若已知 $\mu_y=20$，$\sigma_y^2=60$，求相關係數 ρ。（5分）

(四)求 $f(x=5 \mid y=20)$。（3分）

試題評析	本題是二元隨機變數之相關計算題型，講義中都有類似練習題，只要考生熟讀課本，拿滿分不難。
考點命中	《高點・高上統計學講義第二回》，趙治勳編撰，頁70練習題35。

答：

(一)

$X=x$	5	10	15
$f_X(x)$	0.4	0.3	0.3

(二) $\mu_X=E(X)=5\times0.4+10\times0.3+15\times0.3=9.5$

$\sigma_X^2=V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=107.5-9.5^2=17.25$

其中 $E(X^2)=5^2\times0.4+10^2\times0.3+15^2\times0.3=107.5$

(三) $\rho=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\dfrac{190-(9.5)(20)}{\sqrt{17.25}\sqrt{60}}=0$

其中 $E(XY)=(5)(10)(0.1)+(5)(20)(0.2)+\cdots+(15)(30)(0.1)=190$

(四) $f_{XY}(x=5 \mid y=20)=\dfrac{f_{XY}(x=5,y=20)}{f_Y(y=20)}=\dfrac{0.2}{0.4}=0.5$

四、兩變數x及y之5個觀察值如下：

x	1	2	3	4	5
y	3	7	5	11	14

今已求得：$\bar{x}=3$，$\bar{y}=8$，$\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})=26$，$\sum(x-\bar{x})^2=10$，$\sum(y-\bar{y})^2=80$，$\sum(y-\hat{y})^2=12.40$

(一)試用最小平方法配合迴歸直線 $\hat{y}=a+bx$。（5分）

(二)試求相關係數。（5分）

(三)驗證估計標準誤（Standard error of the estimate）$s_e=2.033$。（5分）

(四)試求母體迴歸係數β之95%信賴區間。（5分）

試題評析	本題是簡迴歸之基礎計算題，只要有準備過簡迴歸九大計算題型，拿滿分是一定的。
考點命中	《高點・高上統計學講義第六回》，趙治勳編撰，頁20例2。

答：

已知 $\bar{X}=3, \bar{Y}=8, SS_X=10, SS_Y=80, SS_{XY}=26, SSE=12.4$

(一) $b=\dfrac{SS_{XY}}{SS_X}=\dfrac{26}{10}=2.6$, $a=\bar{Y}-b\bar{X}=0.2$

$\therefore \hat{y}=0.2+2.6x$

(二) $r=\dfrac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_X}\sqrt{SS_Y}}=\dfrac{26}{\sqrt{10}\sqrt{80}}=0.9192$

(三) $s_e=\sqrt{MSE}=\sqrt{\dfrac{SSE}{n-2}}=\sqrt{\dfrac{SST-SSR}{n-2}}=\sqrt{\dfrac{SS_Y-b^2SS_X}{n-2}}=\sqrt{\dfrac{80-2.6^2\times 10}{5-2}}=2.033$

(四) β之95%信賴區間為

$$(b\mp t_{(3)0.025}\sqrt{\frac{MSE}{SS_X}})=(2.6\mp 3.182\sqrt{\frac{2.033^2}{10}})=(0.5543,4.6457)$$

五、設某電子廠兩生產線之產品重量服從常態分配，今分別自該兩生產線隨機各抽取大小為5之樣本，得其產品重量（單位：公克）如下所示：

生產線A	42	34	40	46	38
生產線B	46	40	44	44	36

(一)試驗證生產線B之 $\bar{x}_B=42$，$s_B^2=\dfrac{\sum(x_2-\bar{x}_2)^2}{n_B-1}=16$。（6分）

(二)今若另求得生產線A之 $\bar{x}_A=40$，$s_A^2=20$。試以 $\alpha=0.10$ 之顯著水準，檢定 H_0：$\sigma_A^2=\sigma_B^2$ 是否成立？（6分）

(三)以 $\alpha=0.10$ 之顯著水準，檢定兩生產線所有產品之平均重量是否有差異？（8分）

試題評析	本題是兩獨立母體變異數與平均數之假設檢定,講義中有幾乎一樣的例題,且上課時也解說過,只要考生熟讀課本,拿滿分不難
考點命中	《高點統計學講義第五回》，趙治勳編撰，頁33例14(a)。

答：

(一) $\bar{x}_B=\dfrac{46+40+44+44+36}{5}=42$

$$s_B^2=\frac{(46-42)^2+(40-42)^2+(44-42)^2+(44-42)^2+(36-42)^2}{5-1}=16$$

(二)

令 X_1, X_2 分別表生產線A與生產線B之產品重量(公克)

母體: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \perp X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 假設 $X_1 \perp X_2$

樣本: $X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{15} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{25} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$

點估計: $\overline{X_1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} X_{1i}}{5}$ 及 $\overline{X_2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} X_{2i}}{5}$

$$S_1^2 = \frac{\sum (X_{1i} - \overline{X}_1)^2}{5-1} \text{ 及 } S_2^2 = \frac{\sum (X_{2i} - \overline{X}_2)^2}{5-1}$$

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ vs } H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

T.S.: $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(4,4)}$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha = 0.1$ if $F^* < F_{0.95(4,4)} = \dfrac{1}{F_{0.05(4,4)}} = 0.157$ 或 $F^* > F_{0.05(4,4)} = 6.388$

$\because F^* = \dfrac{20}{16} = 1.25 \qquad \therefore don't\ reject\ H_0$

結論: 我們沒有足夠證據去推論兩母體變異數不相同

(三)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

T.S.: $T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (0)}{\sqrt{S_p{}^2(\frac{1}{5} + \frac{1}{5})}} \sim t_{(8)}$ 其中 $S_p^2 = \dfrac{(5-1)S_1^2 + (5-1)S_2^2}{5+5-2} = 18$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha = 0.1$ if $|T^*| > t_{0.05(8)} = 1.86$

$\because |T^*| = \left| \dfrac{40 - 42 - (0)}{\sqrt{18(\frac{1}{5} + \frac{1}{5})}} \right| = 0.7454 \qquad \therefore don't\ reject\ H_0$

結論: 我們沒有足夠證據去推論兩母體平均數為不相同