103年公務人員高等考試三級考試試題

類　　別：土木工程、結構工程
科　　目：鋼筋混凝土學與設計
考試時間：2小時

※注意：(一)可以使用電子計算器。
(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

歐 陽老師　主解

下列試題必須依照中國土木水利學會「混凝土工程設計規範（土木401-100）」作答， 否則不計分。
可能使用之公式，但不限於：

$\phi = 0.65+(\varepsilon_t-0.002)(0.25/0.003)$　$E_s=2.04\times10^6\ kgf/cm^2$　$E_c=15000\sqrt{f_c'}\ kgf/cm^2$

$V_c = 0.53\sqrt{f_c'}b_w d$　　$V_c = (0.50\sqrt{f_c'}+175\rho_w\frac{V_u d}{M_u})b_w d \le 0.93\sqrt{f_c'}b_w d$

$s \le 38(\frac{2{,}800}{f_s}) - 2.5c_c \le 30(\frac{2{,}800}{f_s})$　$A_{s,min} = Max\left[\frac{0.8\sqrt{f_c'}}{f_y}b_w d\ ,\ \frac{14}{f_y}b_w d\right]$

$A_{v,min} = Max\left[\frac{0.2\sqrt{f_c'}b_w s}{f_{yt}}\ ,3.5b_w s/f_{yt}\right]$

$\beta_1 = 0.85-0.05\frac{f_c'-280}{70}$ 且 $0.65 \le \beta_1 \le 0.85$

一、一矩形梁寬30 *cm*，*h* = 70 *cm*，試求在只有拉力筋時，依照規範規定，最小設計彎矩強度 $\phi Mn,min$及最大設計彎矩強度 $\phi Mn,max$爲何？已知*d*=6.5 *cm*，*f'c=350 kgf/cm2*，*fy*=4,200 *kgf/cm2*。（25 分）

解：

(1) $0.8\sqrt{f_c'} = 0.8\sqrt{350} = 14.967 > 14$

$$\therefore A_{s,\min} = \frac{0.8\sqrt{f_c'}}{fy}bwd = \frac{14.967}{4200}\times30\times65 = 6.95cm^2$$

$$A_s f_y = 0.85 f_c' ab$$

$$\Rightarrow 6.95\times4.2 = 0.85\times0.35\times30a$$

$$\Rightarrow a = 3.27cm$$

$$x = \frac{a}{\beta_1} = \frac{3.27}{0.8} = 4.09cm < X_{0.005} = \frac{3}{8}d = \frac{3}{8}\times65 = 24.375\ cm$$

故 $\phi = 0.9$

$$\phi M_n,\min = 0.9\times4.2\times6.95(65-\frac{3.27}{2}) = 1664.7\ tf\cdot cm$$

$$= 16.65\ tf\cdot m$$

$$M_{cr}=2\sqrt{f_c'}\times S=2\sqrt{350}\times\frac{30\times70^2}{6}=916706\ \text{kgf}\cdot\text{cm}$$
$$=9.167\ \text{tf}\cdot\text{m}$$

$16.65>\phi M_{cr}=0.9\times9.167=8.25\ \text{tf}\cdot\text{m}$

$\therefore \phi M_n,\text{min}=\underline{16.65\ \text{tf}\cdot\text{m}}$

(2)嘗試使用 $\varepsilon_t=0.004$

$x=\frac{3}{7}d=\frac{3}{7}\times65=27.86\ \text{cm}$

$a=\beta_1 x=0.8\times27.86=22.29\ \text{cm}$

$A_s f_y=0.85f_c'ab$

$\Rightarrow 4.2A_s=0.85\times0.35\times30\times22.29$

$\Rightarrow A_s=47.36\text{cm}^2$

$\phi=0.65+(0.004-0.002)(\frac{0.25}{0.003})=0.8167$

$\phi M_n=0.8167\times47.36\times4.2(65-\frac{22.29}{2})=8748.82\ \text{tf}\cdot\text{cm}$

$=87.49\ \text{tf}\cdot\text{m}$

嘗試使用 $\varepsilon_t=0.005$

$x=\frac{3}{8}d=24.375\ \text{cm}$

$a=\beta_1 x=0.8\times24.375=19.5\ \text{cm}$

$Asfy=0.85f_c'ab$

$\Rightarrow 4.2As=0.85\times0.35\times30\times19.5$

$\Rightarrow As=41.438\text{cm}^2$

$\phi Mn=0.9\times41.438\times4.2(65-\frac{19.5}{2})=8654\ \text{tf}\cdot\text{cm}$

$=86.54\ \text{tf}\cdot\text{m}$ $<87.49\ \text{tf}\cdot\text{m}$

$\therefore \phi M_{n,max}=87.49\ \text{tf}\cdot\text{m}$

二、同上梁，若無剪力筋時，可承受之剪力ϕV_n 爲何？配置最小剪力筋時，該斷面可承受剪力ϕV_n 爲何？該斷面可承受之最大剪力ϕV_n 爲何？在此時其剪力鋼筋之間距爲何？（剪力鋼筋爲D10，d_b=0.953*cm*，A_b=0.71cm^2）（25 分）

解：

(1)無剪力筋時，$V_s=0\ \text{kgf}$

$$\phi V_n=\phi V_c=0.75\times0.53\sqrt{f'_c}b_w d=0.53\sqrt{350}\times30\times65\times0.75$$

(2) $S_{max}=\min\left[\frac{A_v f_y}{3.5bw},\frac{A_v f_y}{0.2\sqrt{f'_c}bw}\right]$

$0.2\sqrt{f'_c}=0.2\sqrt{350}=3.74>3.5$

$\therefore S_{max}=\frac{2\times0.71\times4200}{0.2\sqrt{350}\times30}=53.13\text{ cm}$

但S不應超過$\frac{d}{2}$

$\frac{d}{2}=\frac{65}{2}=32.5\text{cm}$

$\therefore$取$S_{max}=32.5\text{cm}$

$V_s=\frac{A_v F_y d}{S}=\frac{2\times0.71\times4200\times65}{32.5}=11928\text{ kgf}=11.928\text{ tf}$

$\phi V_n=0.75(V_c+V_s)$

$=14.5+0.75\times11.928=\underline{\underline{23.447\text{ tf}}}$

(3)取$V_s=4V_c$

$\phi V_n=\phi(V_s+V_c)=5\phi V_c=5\times14.5=\underline{\underline{72.5\text{ tf}}}$

$S=\frac{A_v f_y d}{V_s}=\frac{A_v f_y d}{4V_c}=\frac{0.71\times2\times4200\times65}{4\times19335}=\underline{5\text{ cm}}$

$S\max=\min\left[\frac{d}{4},30\text{cm},\frac{a_v f_y}{3.5bw},\frac{a_v f_y}{0.2\sqrt{f'_c}bw}\right]$

$=\min[16.25,30,56.8,53.13]=16.25\text{cm}$

三、同上梁，在考慮開裂及施工性時，若主筋爲D32（d_b=3.22*cm*，A_b=8.143cm^2），剪力筋爲D10，在單層鋼筋時，可求得最大鋼筋數目及最小鋼筋數目，求對應之ϕMn。（假設最大粗粒料粒徑爲2.5cm）（25 分）

解：

(1)考慮施工性

主筋左右最小淨間距$S_{min}=\max[1.33d_{骨材}，2.5,d_b]$

$=[1.33\times2.5,2.5,3.22]=3.325\text{cm}$

設主筋單層排n支

$4\times2+0.953\times2+3.22n+3.325(n-1)=30\text{cm}$

6.545n = 23.419 ⇒ n =3.58

只能排3支……單層最大鋼筋數目

$A_{s,max}=3\times8.143\times=24.429cm^2<41.438cm^2$ (見第一題)

故 $\phi=0.9$

$A_sf_y=0.85f'_cab$

$\Rightarrow 4.2\times24.429=0.85\times0.35\times30a$

$\Rightarrow a=11.496cm$

$\phi M_n=0.9\times4.2\times24.429(65-\frac{11.496}{2})=5471.4\ tf\cdot cm$

$=54.714\ tf\cdot m$

(2)考慮裂紋控制

$c_c=4+0.953=4.953$

$f_s=\frac{2}{3}f_y=\frac{2}{3}\times4200=2800\ kgf/cm^2$

$\frac{38\times2800}{f_s}-2.5C_c=38-2.5\times4.953=25.6175cm$

$\frac{30\times2800}{f_s}=\frac{30\times2800}{2800}=30cm$

$S_{max}=\min[25.6175cm,30cm]=25.6175cm$

配2支主筋，$S_{actmal}=30-4-4-0.953\times2-3.22$

$=16.874cm<25.6175cm$ 主筋至少2支

$A_s=2\times8.143=16.286cm^2<41.438cm^2$

$\therefore\phi=0.9$

$A_sf_y=0.85f'_cab$

$\Rightarrow 16.286\times4.2=0.85\times0.35\times30a$

$\Rightarrow a=7.664cm$

$\phi M_n=0.9\times16.286\times4.2(65-\frac{7.664}{2})=3765.57tf\cdot cm$

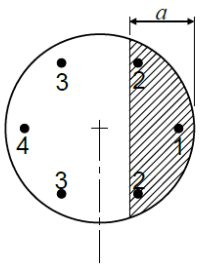
$=37.66tf\cdot m$

四、一圓形柱見圖一，直徑40*cm*，使用6 根D25（d_b=2.54*cm*，A_b=5.067cm^2）鋼筋沿圓周均勻排列，鋼筋中心至最近之混凝土表面爲6.5*cm*，混凝土強度爲350 kgf/cm^2，鋼筋強度爲4200 kgf/cm^2，試求：

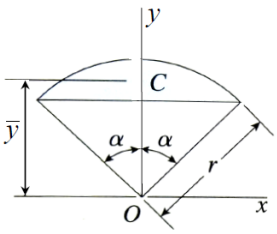
(一)偏心＝0 時之Pn。（5 分）

(二)中性軸位於圓心左側10cm 時之Pn 與Mn，中性軸平行於鋼筋2-2 之連線（可忽略鋼筋2及鋼筋3之效應）。（10 分）

(三)中性軸位於圓心右側10cm 時之Pn 與Mn，中性軸平行於鋼筋2-2 之連線（可忽略鋼筋2及鋼筋3之效應）。（10 分）



圖一



Circular segment (Origin of axes at center of circle)
α = angle in radians $(\alpha \le \pi/2)$

$$A = r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) \qquad \bar{y} = \frac{2r}{3}\left(\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

$$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^3\alpha\cos\alpha)$$

$$I_y = \frac{r^4}{12}(3\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^3\alpha\cos\alpha)$$

$$I_{xy} = 0$$

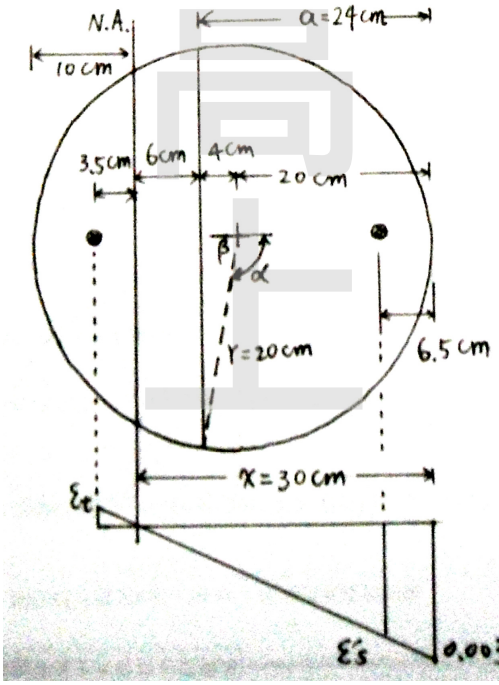
解：

(一) $P_0 = 0.85f_c'A_c + A_{st}(f_y - 0.85f_c')$

$$= 0.85\times0.35\times\frac{\pi}{4}\times40^2 + 6\times5.067(4.2 - 0.85\times0.35)$$

$$= 373.85 + 118.644 = \underline{\underline{492.49\text{tf}}}$$

(二)



$x = 30\text{cm}$

$a = \beta \cdot x = 0.8 \times 30 = 24\text{cm}$

$\varepsilon_s' = \dfrac{0.003}{30}(30 - 6.5) = 2.35 \times 10^{-3} > \varepsilon_y$ 壓筋降伏

$\varepsilon_t = \dfrac{0.003}{30}(10 - 6.5) = 3.5 \times 10^{-4} > \varepsilon_y$ 拉筋未降

$T = A_s f_s = 5.067 \times 2.04 \times 10^6 \times \varepsilon_t / 1000$

$= 3.618 \text{ tf}$

$C_s = A_s'(f_y - 0.85 f_c') = 5.067(4.2 - 0.85 \times 0.35) = 19.774 \text{ tf}$

$\beta = \cos^{-1}\dfrac{4}{20} = 78.463^\circ = 1.3694 \text{ rad.}$

$A_1 = r^2(\beta - \sin\beta\cos\beta) = 20^2(1.3694 - \sin 1.3694 \cos 1.3694)$

$= 469.35\text{cm}^2$

$Ac = \pi r^2 - A_1 = \pi \times 20^2 - 469.35 = 787.2\text{cm}^2$

$Cc = 0.85 f_c A_c = 0.85 \times 0.35 \times 787.2 = 234.2 \text{ tf}$

$P_n = C_c + C_s - T = 234.2 + 19.774 - 3.618 = 250.36 \text{ tf}$

$y_1 = \dfrac{2r}{3}\left[\dfrac{\sin^3\beta}{\beta - \sin\beta\cos\beta}\right] = \dfrac{40}{3}\left[\dfrac{(\sin 1.3694)^3}{1.3694 - \sin 1.3694 \cos 1.3694}\right] = 10.688\text{cm}$

$A_1 y_1 + A_c \bar{y} = 0 \Rightarrow 469.35 \times 10.688 + 787.2 \times \bar{y} = 0$

$\Rightarrow \bar{y} = -6.37\text{cm}$

$M_n = C_c \bar{y} + C_s(20 - 6.5) + T(20 - 6.5)$

$= 234.2 \times 6.37 + 13.5(19.774 + 3.618) = 1808.2 \text{ tf} \cdot \text{cm}$

$= 18.08 \text{ tf} \cdot \text{m}$

(三)

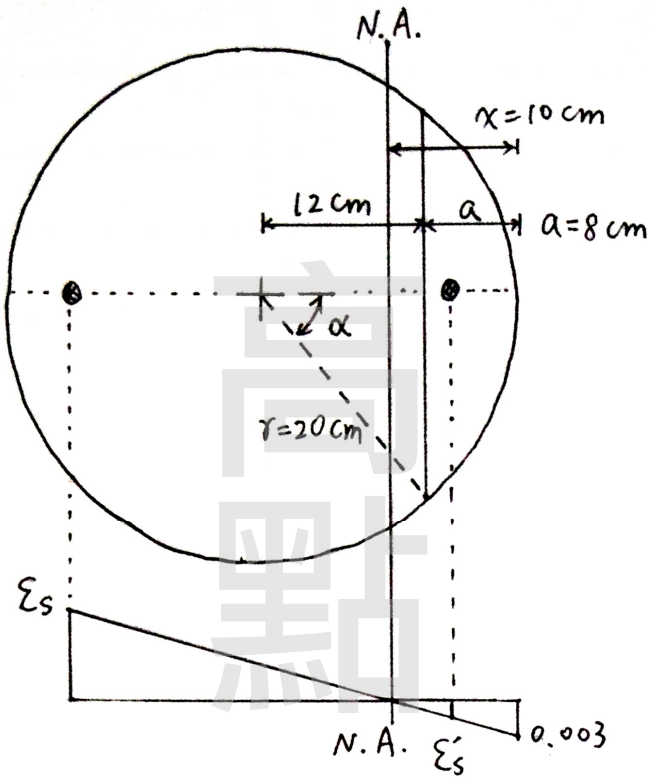
$x = 10\text{cm}$

$a = \beta_1 x = 0.8 \times 10 = 8\text{cm}$

$\varepsilon_s' = \dfrac{0.003}{10}(10 - 6.5) = 1.05 \times 10^{-3} < \varepsilon_y$ 壓筋未降伏

$f_s' = E_s \varepsilon_s' = 2.04 \times 10^6 \times 1.05 \times 10^{-3} = 2142 \text{ kgf/cm}^2$

$C_s = A_s(f_s' - 0.85 f_c') = 5.067(2.142 - 0.85 \times 0.35) = 9.346 \text{ tf}$



$$\varepsilon_t = \frac{0.003}{10}\times(40-10-6.5) = 7.05\times10^{-3} > \varepsilon_y \quad \text{拉筋降伏}$$

$$T = A_s f_y = 5.067\times4.2\times = 21.2814 \text{ tf}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{12}{20} = 0.9273 \text{ rad.}$$

$$A_c = r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = 178.918\text{cm}^2$$

$$C_s = 0.85f'_cA_c = 0.85\times0.35\times178.918 = 53.228 \text{ tf}$$

$$P_n = C_c + C_s - T = 53.228 + 9.346 - 21.2814 = 41.293 \text{ tf}$$

$$\bar{y} = \frac{2r}{3}\left[\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}\right] = \frac{40}{3}\left[\frac{(\sin0.9273)^3}{0.9273\sin0.9273\cos0.9273}\right] = 15.262\text{cm}$$

$$M_n = C_c\bar{y} + 13.5(C_s + T)$$

$$= 53.228\times15.262 + 13.5(9.346 + 21.2814)$$

$$= 1225.8 \text{ tf}\cdot\text{cm} = 12.258 \text{ tf}\cdot\text{m}$$