《統計學概要》

試題評析

今年考題著重觀念，考題呈現方式靈活，雖然考題難度不高，但考生很容易會因為看不懂題目而失去分數，考後再去看解答就會發現，其實各題的考試範圍都是自己曾經準備過的。以普考來說，本卷難度中上，基本分應該要有７０分。

第一題：範圍是利用動差估計法尋找點估計量，難度不高，只要考生注意解答時英文字母大小寫之差異，應該可以得到滿分。

第二題：範圍是假設檢定中有關檢定力函數之計算題，雖然沒有複雜的數學運算，但題目在呈現解題資訊時所使用的方式有可能讓考生不知如何下手，本題是要用型Ｉ及型ＩＩ誤差之定義為基礎去解答，對確切瞭解假設檢定中各種誤差定義的考生，分數可以輕鬆獲得，但針對於只背公式之考生來說，要獲得一分實在是難事。

第三題：第一小題事件機率之計算題，只要看懂題目，不被題目誤導（求黃花卻給紅花機率），且假設條件不忘補充，中等程度之考生可以獲得滿分。第二小題是有關母體成功比例信賴區間之觀念題，只要利用失敗與成功為補集事件，即機率和為１之觀念，考生就可以獲得滿分。

第四題：範圍是有關Ｆ分配之查表證明，難度不高，應該大多考生可以得到分數。

第五題：範圍是兩獨立母體變異數比之假設檢定，只要考生注意到題目給的Ｆ值是 S_Y^2/S_X^2 ，且假設條件不忘補充，中等程度之考生可以獲得滿分。

一、假定中部山區每天的雨量為隨機變數X，其母體平均 $E(X)=\theta_1$ 及變異數 $Var(X)=\theta_2 e^{\theta_1}$ 。

(一)如果我們有一組隨機樣本 $X_1, \cdots, X_n$，請用動差法找出 θ_1 及 θ_2 之估計量。（15分）

(二)如果n=25，$\sum_{i=1}^{25} x_i = 25$，$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 50$，請算出 θ_1 及 θ_2 的估計值。（10分）

答：

（一）令 $E(X)=\theta_1=\overline{X}$

$$E(X^2)=V(X)+[E(X)]^2=\theta_2 e^{\theta_1}+\theta_1^{\,2}=\frac{\sum X_i^2}{n}$$

可得 $\hat{\theta}_{1MME}=\overline{X}$ ，$\hat{\theta}_{2MME}=\dfrac{\sum X_i^2-n\overline{X}^2}{ne^{\overline{X}}}$

（二）$\hat{\theta}_{1MME}=\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{25}=1$

$$\hat{\theta}_{2MME}=\frac{\sum x_i^2-25\overline{x}^2}{25e^{\overline{x}}}=0.3679$$

【高分命中】趙治勳老師《統計學上課講義第二回》，頁19。

高點・高上高普特考 goldensun.get.com.tw 台北市開封街一段 2 號 8 樓 02-23318268
【中壢】中壢市中山路 100 號 14 樓・03-4256899 【台中】台中市東區復興路四段 231-3 號 1 樓・04-22298699
【台南】台南市中西區中山路 147 號 3 樓之 1・06-2235868 【高雄】高雄市新興區中山一路 308 號 8 樓・07-2358996
【另有板橋・淡水・三峽・林口・羅東・逢甲・東海・中技・雲林・彰化・嘉義】

二、$H_0:\theta\in\{-1,0\}$ vs $H_1:\theta\in\{1,2\}$。現有三個棄卻區域C_1、C_2與C_3，其檢定力（power）函數分別表示如下：

$\pi_{c_1}(-1)=0.03,\quad \pi_{c_1}(0)=0.05,\quad \pi_{c_1}(1)=0.15,\quad \pi_{c_1}(2)=0.6$

$\pi_{c_2}(-1)=0.03,\quad \pi_{c_2}(0)=0.04,\quad \pi_{c_2}(1)=0.3,\quad \pi_{c_2}(2)=0.7$

$\pi_{c_3}(-1)=0.02,\quad \pi_{c_3}(0)=0.06,\quad \pi_{c_3}(1)=0.4,\quad \pi_{c_3}(2)=0.6$

(一)若每個棄卻區域可算出H_1為真時第二種錯誤機率的最大值，則請問那個棄卻區域具有最小的第二種錯誤機率最大值。（13分）

(二)若顯著水準為0.05，則請問最好的棄卻區域為何？為什麼？（12分）

答：

令 X 表樣本向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

（一）拒絕域C_1：$\beta=P(X\notin C_1\,|\,\theta\in\{1,2\})=1-P(X\in C_1\,|\,\theta\in\{1,2\})$

$=1-[P(X\in C_1\,|\,\theta=1)+P(X\in C_1\,|\,\theta=2)]$

$=1-[\pi_{C_1}(1)+\pi_{C_1}(2)]=1-[0.15+0.6]=0.25$

拒絕域C_2：$\beta=P(X\notin C_2\,|\,\theta\in\{1,2\})=1-P(X\in C_2\,|\,\theta\in\{1,2\})$

$=1-[P(X\in C_2\,|\,\theta=1)+P(X\in C_2\,|\,\theta=2)]$

$=1-[\pi_{C_2}(1)+\pi_{C_2}(2)]=1-[0.3+0.7]=0$

拒絕域C_3：$\beta=P(X\notin C_3\,|\,\theta\in\{1,2\})=1-P(X\in C_3\,|\,\theta\in\{1,2\})$

$=1-[P(X\in C_3\,|\,\theta=1)+P(X\in C_3\,|\,\theta=2)]$

$=1-[\pi_{C_3}(1)+\pi_{C_3}(2)]=1-[0.4+0.6]=0$

因此，拒絕域C_2與C_3都具有最小的第二種錯誤機率最大值。

（二）拒絕域C_1：$\alpha=P(X\in C_1\,|\,\theta\in\{-1,0\})=\pi_{C_1}(-1)+\pi_{C_1}(0)=0.03+0.05=0.08$

拒絕域C_2：$\alpha=P(X\in C_2\,|\,\theta\in\{-1,0\})=\pi_{C_2}(-1)+\pi_{C_2}(0)=0.03+0.04=0.07$

拒絕域C_3：$\alpha=P(X\in C_3\,|\,\theta\in\{-1,0\})=\pi_{C_3}(-1)+\pi_{C_3}(0)=0.02+0.06=0.08$

由於三個拒絕域之型 I 誤差都大於題目設定之顯著水準0.05，故在顯著水準0.05下，拒絕域C_1 C_2 C_3都不為最好的拒絕域。

【高分命中】趙治勳老師《統計學上課講義第二回》，頁54。

三、某種植物依其開花種類分為紅花與黃花兩種。據植物學理論，此植物開紅花者與開黃花者配對後，開紅花的機率為0.75。現有5株經過此配對後的植物，則：

(一)請問至少有一株植物開黃花的機率為何？（10分）

(二)假定植物開黃花的機率為P_y，開紅花的機率為P_x，其中P_x與P_y皆未知。當配對株數為$n=30$時，請問P_x與P_y的$100(1-\alpha)\%$（近似）信賴區間各為何？請問兩個信賴區間的長度是否相等？（15分）

答：

（一）令A_i表第i株經過配對後之植物開黃花，$i=1,2,3,4,5$，已知$P(A_i^c)=0.75$，　且假設$A_i\perp A_j, i\neq j$

$P(\text{至少有一株開黃花})=1-P(\text{沒有一株開黃花})=1-P(A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_5^c)$

$=1-P(A_1^c)P(A_2^c)\cdots P(A_5^c)=1-(0.75)^5=0.7627$

高點．高上高普特考　goldensun.get.com.tw　台北市開封街一段 2 號 8 樓　02-23318268
【中壢】中壢市中山路 100 號 14 樓・03-4256899　【台中】台中市東區復興路四段 231-3 號 1 樓・04-22298699
【台南】台南市中西區中山路 147 號 3 樓之 1・06-2235868　【高雄】高雄市新興區中山一路 308 號 8 樓・07-2358996
【另有板橋・淡水・三峽・林口・羅東・逢甲・東海・中技・雲林・彰化・嘉義】

（二）令 X,Y 分別表開紅花與開黃花，假設隨機樣本

母體: $X \sim Ber(p_X)$

樣本: $X_1, X_2, \cdots, X_{30} \overset{iid}{\sim} Ber(p_X)$

點估計: $\hat{p}_X = \dfrac{\sum X_i}{30} \underset{by C.L.T.}{\sim} N(p_X, \dfrac{p_X(1-p_X)}{30})$

樞紐量: $Z = \dfrac{\hat{p}_X - p_X}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{30}}} \underset{by C.L.T.}{\sim} N(0,1)$

機率區間: $P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \dfrac{\hat{p}_X - p_X}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{30}}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

信賴區間: $P(\hat{p}_X - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{30}} \le p_X \le \hat{p}_X + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{30}}) = 1-\alpha$

結論: p_X 之 $(1-\alpha)100\%$ 近似信賴區間為

$$(\hat{p}_X - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{30}}, \hat{p}_X + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{30}})$$

母體: $Y \sim Ber(p_Y)$

樣本: $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{30} \overset{iid}{\sim} Ber(p_Y)$

點估計: $\hat{p}_Y = \dfrac{\sum Y_i}{30} \underset{by C.L.T.}{\sim} N(p_Y, \dfrac{p_Y(1-p_Y)}{30})$

樞紐量: $Z = \dfrac{\hat{p}_Y - p_Y}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{30}}} \underset{by C.L.T.}{\sim} N(0,1)$

機率區間: $P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \dfrac{\hat{p}_Y - p_Y}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{30}}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

信賴區間: $P(\hat{p}_Y - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{30}} \le p_Y \le \hat{p}_Y + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{30}}) = 1-\alpha$

結論: p_Y 之 $(1-\alpha)100\%$ 近似信賴區間為

$$(\hat{p}_Y - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{30}}, \hat{p}_Y + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{30}})$$

由於 $\hat{p}_Y = 1-\hat{p}_X$，故 p_Y 之信賴區間長度為 $2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{30}} = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{(1-\hat{p}_X)\hat{p}_X}{30}}$，與 p_X 之信賴區間長度為 $2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{30}}$ 是相等的。

高點・高上高普特考 goldensun.get.com.tw 台北市開封街一段 2 號 8 樓 02-23318268
【中壢】中壢市中山路 100 號 14 樓・03-4256899 【台中】台中市東區復興路 231-3 號 1 樓・04-22298699
【台南】台南市中西區中山路 147 號 3 樓之 1・06-2235868 【高雄】高雄市新興區中山一路 308 號 8 樓・07-2358996
【另有板橋・淡水・三峽・林口・羅東・逢甲・東海・中技・雲林・彰化・嘉義】

【高分命中】
(一)趙治勳老師《統計學上課講義第一回》，第三章。
(二)趙治勳老師《統計學上課講義第二回》，頁76。

四、隨機變數F為 $f(r_1,r_2)$ 之分配，且 $f_\alpha(r_1,r_2)$ 滿足 $P(F \le f_\alpha(r_1,r_2)) = \alpha$。統計學之機率表經常只能查 $f_\alpha(r_1,r_2) \forall \alpha > 0.5$，請推導並證明如何算出 $\alpha < 0.5$ 時的 $f_\alpha(r_1,r_2)$。（15分）

答：

$P(F \le f_\alpha(r_1,r_2)) = \alpha$　其中 $F \sim f(r_1,r_2)$，$\alpha > 0.5$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{F} \ge \frac{1}{f_\alpha(r_1,r_2)}\right) = \alpha \quad \text{其中} \frac{1}{F} \sim f(r_2,r_1)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{F} \ge f_{1-\alpha}(r_2,r_1)\right) = \alpha$$

可得 $\dfrac{1}{f_\alpha(r_1,r_2)} = f_{1-\alpha}(r_2,r_1)$，因此，$f_\alpha(r_1,r_2) = \dfrac{1}{f_{1-\alpha}(r_2,r_1)}, \alpha < 0.5$。

【高分命中】趙治勳老師《統計學上課講義第二回》，頁11。

五、某電子產品之厚度為重要品質特徵。現該產品有兩條生產線。遂從兩條生產線各抽取一組隨機樣本 $X_1,\cdots,X_n \sim N(\mu_x,\sigma_x^2)$ 及 $Y_1,\cdots Y_m \sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$，以檢定 $H_0:\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ vs $H_1:\sigma_x^2 < \sigma_y^2$，並令 $F = \sum_{i=1}^m (Y_i - \overline{Y})^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$。若F之觀察值為 F_0 且滿足 $P(F < F_0; \sigma_x^2 = \sigma_y^2) < 0.95$，請問當 $\alpha = 0.05$ 時檢定的結論為何？為什麼？（10分）

答：

令 X,Y 分別表兩條生產線上電子產品之厚度，假設 $X \perp Y$

母體：$X \sim N(\mu_X,\sigma_X^2) \perp Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$

樣本：$X_1,X_2,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu_X,\sigma_X^2)$, $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m \overset{iid}{\sim} N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$

點估計：$S_X^2 = \dfrac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ 及 $S_Y^2 = \dfrac{\sum (Y_i - \overline{Y})^2}{m-1}$

$$H_0:\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 vs H_1:\sigma_X^2 < \sigma_Y^2 \Rightarrow H_0:\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} = 1 vs H_1:\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} > 1$$

$$\text{T.S.}: F_1 = \frac{\left.\dfrac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}\right/(m-1)}{\left.\dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2}\right/(n-1)} = \frac{S_Y^2}{S_X^2} = \frac{n-1}{m-1}\frac{\sum (Y_i - \overline{Y})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \sim F_{(m-1,n-1)}$$

R.R.：Reject H_0 at $\alpha = 0.05$ if α >p-value

$$\because \text{p-value} = P\left(F_1 \ge \frac{n-1}{m-1}F_0 \mid \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\right) = P(F \ge F_0 \mid \sigma_X^2 = \sigma_Y^2) > 1 - 0.95 = 0.05$$

高點．高上高普特考　goldensun.get.com.tw　台北市開封街一段 2 號 8 樓　02-23318268
【中壢】中壢市中山路 100 號 14 樓．03-4256899　【台中】台中市東區復興路四段 231-3 號 1 樓．04-22298699
【台南】台南市中西區中山路 147 號 3 樓之 1．06-2235868　【高雄】高雄市新興區中山一路 308 號 8 樓．07-2358996
【另有板橋．淡水．三峽．林口．羅東．逢甲．東海．中技．雲林．彰化．嘉義】

∴ don't reject H_0

【高分命中】趙治勳老師《統計學上課講義第二回》，頁73。

高點．高上高普特考

高點．高上高普特考　goldensun.get.com.tw　台北市開封街一段 2 號 8 樓　02-23318268
【中壢】中壢市中山路 100 號 14 樓‧03-4256899　【台中】台中市東區復興路四段 231-3 號 1 樓‧04-22298699
【台南】台南市中西區中山路 147 號 3 樓之 1‧06-2235868　【高雄】高雄市新興區中山一路 308 號 8 樓‧07-2358996
【另有板橋‧淡水‧三峽‧林口‧羅東‧逢甲‧東海‧中技‧雲林‧彰化‧嘉義】