

《統計學概要》

試題評析

各題之考試範圍分別為「敘述統計學」、「抽樣分配」、「卡方適合度檢定」與「變異數分析」，皆沒有超過課程範圍。各題均屬該章節中基礎的計算題型，與講義題庫之題型完全符合，只要考生在計算上小心，要得到滿分並不難。

一、若有一組80筆的樣本資料，資料已整理成次數分配表，如下表：（每小題5分共25分）

| | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|--------|---------|
| 組限 | 30-35 | 50-70 | 70-90 | 90-110 | 110-130 |
| 組次數 | 5 | 20 | 30 | 40 | 5 |

試計算：(一)平均數 (二)標準差 (三)中位數 (四)第28個百分位數 (五)第3個四分位數

答：

| 組 | 組限 | 組次數 | 組中點 | 累積次數 |
|---|---------|-----|-----|------|
| 1 | 30-50 | 5 | 40 | 5 |
| 2 | 50-70 | 20 | 60 | 25 |
| 3 | 70-90 | 30 | 80 | 55 |
| 4 | 90-110 | 40 | 100 | 95 |
| 5 | 110-130 | 5 | 120 | 100 |

$$(一) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i m_i}{100} = 84 \quad (二) s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 f_i (m_i - \bar{x})^2}{100 - 1}} = 19.695$$

(三) 中位數為(70,90)內任何數值，以下求出一個數值代表之

$$\frac{50 - 25}{M_d - 70} = \frac{55 - 50}{90 - M_d} \Rightarrow M_d = 86.667$$

(四) 第28個百分位數 $\eta_{0.28}$ 為(70,90)內任何數值，以下求出一個數值代表之

$$\frac{28 - 25}{\eta_{0.28} - 70} = \frac{55 - 28}{90 - \eta_{0.28}} \Rightarrow \eta_{0.28} = 72$$

(五) 第3個四分位數 Q_3 為(90,110)內任何數值，以下求出一個數值代表之

$$\frac{75 - 55}{Q_3 - 90} = \frac{95 - 75}{110 - Q_3} \Rightarrow Q_3 = 100$$

二、(一) 設 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bernoulli}(p=0.6)$ ，試求 $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2}{4}$ 之抽樣分配？(12分)

(二) 設 $X_1, X_2, \dots, X_{50} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bernoulli}(p=0.6)$ ，試求 $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{50}$ 之抽樣分配？(13分)

答：

(一) 題目有誤， S^2 無法使用中央極限定理，就算能使用，本題又屬小樣本，猜測出題老師是想要考常態母體下 S^2 之抽樣分配：

設 $X_1, X_2, \dots, X_5 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\frac{(5-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(4)}^2$, 故 $S^2 \sim \text{Gamma}(2, \lambda = \frac{2}{\sigma^2})$

(二)題目有誤，應該問 \bar{X} 之漸近抽樣分配：

$X_1, X_2, \dots, X_{50} \sim \text{Ber}(p = 0.6)$, $\bar{X} \underset{\text{by C.L.T.}}{\sim} N(0.6, 0.0048)$

三、某百貨公司欲了解其平常時段每分鐘客戶人數是否服從Poisson分配，隨機抽出1000分鐘記錄每分鐘客戶人數，經整理後得下列資料表：(25分)

| | | | | | | | | | | |
|------|----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|---|
| 人數/分 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 次數 | 50 | 200 | 250 | 150 | 100 | 90 | 80 | 60 | 18 | 2 |

在5%顯著水準下，試檢定「每分鐘客戶人數是否服從Poisson分配」。

答：

令X表平常時段每分鐘顧客人數

| | | | | | | | | | | |
|------------|------|-------|-------|-------|-------|-----|------|------|----|-----|
| 人數x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9以上 |
| 次數 O_i | 50 | 200 | 250 | 150 | 100 | 90 | 80 | 60 | 18 | 2 |
| 期望次數 E_i | 46.8 | 143.3 | 219.4 | 223.9 | 171.4 | 105 | 53.6 | 23.4 | 9 | 4.2 |

$\hat{\lambda} = \bar{x} = 3.062$, $X \sim \text{Poisson}(3.062)$

$P(X=0) = \frac{e^{-3.062} 3.062^0}{0!} = 0.0468$ 因此期望次數為 $1000 * 0.0468 = 46.8$

以此類推得到各組之期望次數。

發現x=9以上之期望次數不大於5

因此合併組後如下：

| | | | | | | | | | |
|------------|------|-------|-------|-------|-------|-----|------|------|------|
| 人數x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8以上 |
| 次數 O_i | 50 | 200 | 250 | 150 | 100 | 90 | 80 | 60 | 20 |
| 期望次數 E_i | 46.8 | 143.3 | 219.4 | 223.9 | 171.4 | 105 | 53.6 | 23.4 | 13.2 |

H_0 : 資料來自波瓦松分配 vs H_1 : not H_0

T.S.: $\chi^2 = \sum_{i=1}^9 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_{(9-1-1=7)}^2$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha = 0.05$ if $\chi^{2*} > \chi_{0.05(7)}^2 = 14.0671$

$\because \chi^{2*} = 156.95 \therefore \text{reject } H_0$

結論：我們有足夠證據去推論，每分鐘客戶人數不是服從Poisson分配。

四、有關汽車的研究，研究者想了解「不同品牌的機油」是否會影響耗油量。研究者利用「one-way ANOVA」，得到下列資料：(25分)

| | |
|------|--------------------|
| 機油的牌 | 汽車每公升的行駛公里數 |
| A牌 | 12, 13, 15, 10, 11 |
| B牌 | 7, 6, 13, 10, 12 |
| C牌 | 14, 15, 13, 14, 11 |

| | |
|----|--------------------|
| D牌 | 15, 20, 18, 16, 14 |
|----|--------------------|

在5%顯著水準下，試檢定不同品牌的機油是否會影響汽車的耗油量？

答：

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ vs $H_1: \text{至少一個 } \mu_i \neq \mu_j, i \neq j = 1, 2, 3, 4$

| ANOVA TABLE | | | | |
|-------------|--------|------|--------|---------------|
| source | SS | d.f. | MS | F |
| 品牌 | 126.55 | 3 | 42.183 | $F^* = 7.997$ |
| Error | 84.4 | 16 | 5.275 | |
| Total | 210.95 | 19 | | |

$$\text{T.S.: } F = \frac{MSR}{MSE} \sim F_{(3,16)}$$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha = 0.05$ if $F^* > F_{0.05(3,16)} = 3.2389$

$\therefore F^* = 7.997 \quad \therefore \text{reject } H_0$

結論：我們有足夠的統計證據去推論，不同品牌的機油會影響耗油量。