

# 《統計學》

## 試題評析

每一題均為基本題，全部在正規課程中已完全掌控，一般學生應可考到80分以上。

註： $z_{0.05} = 1.645$ ,  $z_{0.025} = 1.96$ ,  $z_{0.1587} = 1.0$ ,  $z_{0.0228} = 2.0$ ,  $z_{0.0013} = 3.0$ ,  $F_{0.05}(3,6) = 4.76$ ,  
 $F_{0.05}(2,6) = 5.14$ ,  $F_{0.05}(6,3) = 8.94$ ,  $F_{0.05}(6,2) = 19.33$ ,  $t_{0.025}(9) = 2.262$ ,  $t_{0.05}(9) = 1.833$ ,  
 $t_{0.025}(10) = 2.228$ ,  $t_{0.05}(10) = 1.812$ ,  $\chi_{0.05}^2(9) = 16.92$ ,  $\chi_{0.05}^2(10) = 18.31$ ,  $\chi_{0.025}^2(9) = 19.02$ ,  
 $\chi_{0.025}^2(10) = 20.48$ 。(z值為右尾的機率值)

一、假設有一個隨機變數X的累積分配函數F(x)給定如下：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 5 \\ 1/4 & 5 \leq x < 10 \\ 3/4 & 10 \leq x < 15 \\ 1 & x \geq 15 \end{cases}$$

(一)請計算出X之密度函數f(x)。(5分)

(二)請計算出X之期望值E(X)。(5分)

答：

$$(一) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 5 \\ \frac{1}{2}, & x = 10 \\ \frac{1}{4}, & x = 15 \\ 0, & \text{O.W.} \end{cases}$$

$$(二) EX = \sum x \cdot f(x) \\ = (5 \times \frac{1}{4}) + (10 \times \frac{1}{2}) + (15 \times \frac{1}{4}) = 10$$

## 【參考書目】

秦大成老師，上課講義第二回，第25頁(EX. 2)。

二、假設  $M_X(t)$  表示隨機變數X之動差母函數 (moment generating function)，而且

$M_X(t) = e^{650t + 312.5t^2}$ 。請計算出：

(一)  $\Pr(625 < X < 675)$  之值？(5分)

(二) 如果  $\Pr(|X - 650| < k) = 0.9544$ ，請計算出k之值？(5分)

**答：**

$$M_X(t) = e^{650t + 312.5t^2} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$\therefore X \sim N(\mu = 650, \sigma^2 = 25^2)$$

$$(一) P(625 < X < 675) = P\left(\frac{625 - 650}{25} < Z < \frac{675 - 650}{25}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 1)$$

$$= 1 - 2 \times 0.1587 = 0.6826$$

$$(二) P(|X - 650| < k) = P\left(|Z| < \frac{k}{25}\right) = 0.9544 = 1 - 0.0456$$

$$\Rightarrow \frac{k}{25} = Z_{\frac{0.0456}{2}} = Z_{0.0228} = 2$$

$$\therefore k = 50$$

**【參考書目】**

秦大成老師，上課講義第三回，第48頁(EX.3)。

三、假設有一個隨機變數 $X$ 是服從卜瓦松分配 (Poisson distribution)，而且其期望值 $\mu = 10$ ，請回答下列之問題：

(一)請計算出  $\Pr(5 < X < 15)$  之下界值？(5分)

(二)請計算出  $\Pr(9 < \bar{X}_{25} < 11)$  之下界值？(5分)

(三)請計算出  $\Pr(1/2 < X/\mu < 3/2)$  之下界值？(5分)

**答：**

$$EX = V(X) = 10$$

$$(一) p(5 < X < 15) = p(-5 < X - EX < 5)$$

$$= p(|X - EX| < 5) \geq 1 - \frac{10}{5^2} = 0.6$$

$\therefore$  下界值0.6

$$(二) E(\bar{X}_{25}) = EX = 10$$

$$V(\bar{X}_{25}) = \frac{V(X)}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$p(q < \bar{X}_{25} < 11) = p(-1 < \bar{X}_{25} - E\bar{X}_{25} < 1)$$

$$= (|\bar{X}_{25} - E\bar{X}_{25}| < 1) \geq 1 - \frac{2/5}{1} = \frac{3}{5}$$

$\therefore$  下界值 $\frac{3}{5}$

$$(三) p\left(\frac{1}{2} < \frac{X}{\mu} < \frac{3}{2}\right) = p(5 < X < 15)$$

$$= p(|X - \mu| < 5) \geq 1 - \frac{10}{5^2} = 0.6$$

$\therefore$  下界值0.6

## 【參考書目】

秦大成老師，上課講義第三回，第77頁(EX.1)。

四、假設有一個X與Y之聯合機率密度函數 $f(x,y)=6x$ ， $0 < x < y < 1$ ， $f(x,y)=0$ ，其他。請回答下列之問題：

- (一)請計算出X之密度函數 $f_x$ ？(5分)  
 (二)請計算出X與Y之共變異數 (co-variance)  $COV(X,Y)$ ？(5分)  
 (三)請計算出 $E(Y|x)$ ？(5分)

答：

$$(一) f(x) = \int_x^1 6x \, dy = 6xy \Big|_x^1 = 6x - 6x^2, \quad 0 < x < 1$$

$$(二) f(y) = \int_0^y 6x \, dx = 3x^2 \Big|_0^y = 3y^2, \quad 0 < y < 1$$

$$EX = \int_0^1 x(6x - 6x^2) \, dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$EY = \int_0^1 y \cdot 3y^2 \, dy = \frac{3}{4}y^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$EXY = \int_0^1 \int_x^1 (xy) \cdot 6x \, dy \, dx = \int_0^1 3x^2 y^2 \Big|_x^1 \, dx \\ = \int_0^1 3x^2 - 3x^4 \, dx = x^3 - \frac{3}{5}x^5 \Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$COV(X,Y) = EXY - (EX)(EY) \\ = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{40}$$

$$(三) f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{6x}{6x - 6x^2} = \frac{1}{1-x}, \quad 0 < x < y < 1$$

$$E(Y|x) = \int_x^1 y \cdot \frac{1}{1-x} \, dy = \frac{y^2}{2(1-x)} \Big|_x^1 = \frac{1+x}{2}$$

## 【參考書目】

秦大成老師，上課講義第二回，第78頁(EX.5)。

五、假設有一組n個隨機樣本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 彼此互相獨立，而且具有相同的指數分配

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad 0 < x, \theta < \infty。請回答下列之問題：$$

- (一)請計算出 $\theta$ 之最大概似估計式 (MLE, Maximum Likelihood Estimator)？(5分)  
 (二)請計算出 $\bar{X}_n$ 之Rao-Cramer下界值？(10分)

答：

$$(一) L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}}$$

$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{n\bar{x}}{\theta}$$

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{n\bar{x}}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \theta = \bar{x}$$

$$\therefore \left. \frac{d \ln L}{d\theta^2} \right|_{\theta=\bar{x}} < 0 \quad \therefore \hat{\theta} = \bar{X} \text{ 爲 } \theta \text{ 之 MLE}$$

$$(二) \ln f(x; \theta) = \ln\left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\right) = -\ln \theta - \frac{x}{\theta}$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{X}{\theta^2}$$

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right]^2 = E\left[\frac{X}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right]^2 = \frac{1}{\theta^4} E(X - \theta)^2$$

$$= \frac{1}{\theta^4} \text{Var}(X) = \frac{1}{\theta^4} \theta^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\therefore \text{Rao-Cramer 下界} = \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}$$

【參考書目】

秦大成老師，上課講義第四回，第8頁(EX. 3)、第46頁(EX. 1)。

六、假設有一組隨機樣本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  彼此互相獨立，而且具有相同的分配。如下所示

$f(x; p) = p(1-p)^x, x = 0, 1, 2, \dots; f(x; p) = 0$ ，其他。請回答下列之問題：

(一)請計算出  $p$  之最大概似估計式 (MLE)？(10分)

(二)請計算出  $(1-p)/p$  之最大概似估計式 (MLE)？(10分)

答：

$$(一) L(p) = \prod_{i=1}^n p(1-p)^{x_i} = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i} = p^n (1-p)^{n\bar{x}}$$

$$\ln L(p) = n \ln p + n\bar{x} \ln(1-p)$$

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{n}{p} - \frac{n\bar{x}}{1-p} = 0$$

$$p = \frac{1}{\bar{x} + 1}$$

$$\therefore \left. \frac{d^2 \ln L}{dp^2} \right|_{p=\frac{1}{\bar{x}+1}} < 0 \quad \therefore \hat{p} = \frac{1}{\bar{X} + 1} \text{ 爲 } p \text{ 之 MLE}$$

(二)令  $g(y) = \frac{1-y}{y}$  為 1-1 函數

根據 MLE 不變性

$$g(\hat{p}) = g\left(\frac{1}{\bar{X}+1}\right) = \bar{X} \text{ 為 } \frac{1-p}{p} \text{ 之 MLE}$$

七、假設有某農業試驗所想要了解四塊土壤品質不同的農地（農地編號A、B、C、D），並利用三種品牌之肥料（品牌編號甲、乙、丙）來生產稻米。試驗之稻米產量資料如表所示：（以顯著水準=0.05來檢定）

肥料 農地	甲	乙	丙
A	51	42	57
B	56	59	65
C	61	69	71
D	63	55	53

(一)請建立上述資料之變異數分析表 (ANOVA) ? (10分)

(二)請檢定土壤品質是否對稻米的產量有影響? (5分)

**答：**

(一)

肥料 農地	甲	乙	丙	樣本數	列和
A	51	42	57	3	150
B	56	59	65	3	180
C	61	69	71	3	201
D	63	55	53	3	171
樣本數	4	4	4	N = 12	
行和	231	225	246		$T_{..} = 702$

$$\begin{aligned} SSTO &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N} = (51^2 + 42^2 + \dots + 53^2) - \frac{702^2}{12} \\ &= 41782 - 41067 = 715 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSR &= \sum_{i=1}^r \frac{T_{i.}^2}{C} - \frac{T_{..}^2}{N} = \frac{1}{3}(150^2 + 180^2 + 201^2 + 171^2) - \frac{702^2}{12} \\ &= 41514 - 41067 = 447 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSC &= \sum_{j=1}^c \frac{T_{.j}^2}{r} - \frac{T_{..}^2}{N} = \frac{1}{4}(231^2 + 225^2 + 246^2) - \frac{702^2}{12} \\ &= 41125.5 - 41067 = 58.5 \end{aligned}$$

$$SSE = SSTO - SSR - SSC = 209.5$$

ANOVA table

變異來源	平方和	自由度	均方和	F值
列間	447	3	149	4.2673`
行間	58.5	2	29.25	0.8377
誤差	209.5	6	34.9167	
總和	715	11		

$$(二)① \begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D \\ H_1 : \text{不全等} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \text{土壤對稻米產量無顯著影響} \\ H_1 : \text{土壤對稻米產量有顯著影響} \end{cases}$$

$$② C = \{F | F > F_{0.05}(4-1, (4-1)(3-1)) = 4.76\}$$

$$③ F = 4.2673 \notin C$$

$\therefore$  Not reject  $H_0$ , 土壤對稻米產量無顯著影響

**【參考書目】**

秦大成老師，上課講義第六回，第42頁(EX. 1)。