

《統計學》

試題評析	本年度考題：全部著重在觀念及公式推導，每一題都在講義中詳細論述，相信熟讀講義的同學應該可以考到90分以上。
考點命中	第一題：(一)在第三回P27完全相同；(二)在第二回P32〈例題1〉完全相同。 第二題：在第二回P56-P58表格整理內容完全相同。 第三題：在第四回P57〈例題6〉完全相同。 第四題：在迴歸分析第一回P82〈例題3〉完全相同。

一、設 X 與 N 為兩個離散隨機變數， $N \sim P(\lambda)$ ， $X|_{N=n} \sim \text{Bin}(n, p)$ ？

(一)試求 X 之邊際分配，需說明分配名稱及參數。(10分)

(二)1. 計算 X 之動差母函數， $M_X(t)$ 。(5分)

並由此計算：

2. $E(X)$ 。(5分)

3. $E(X^2)$ 。(5分)

答：

$$(一) f(n, x) = f(x|n) \cdot f(n) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=x}^{\infty} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} p^x \sum_{n=x}^{\infty} \frac{n!}{x! (n-x)!} \cdot \frac{(1-p)^{n-x} \lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^x}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-x}}{(n-x)!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^x}{x!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^x}{x!} \end{aligned}$$

$$\therefore X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$$

$$\begin{aligned} (二) 1. M_X(t) &= E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^x}{x!} = e^{-\lambda p} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda p e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda p} \cdot e^{\lambda p e^t} \\ &= e^{\lambda p (e^t - 1)}, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

$$2. M'_X(t) = e^{\lambda p (e^t - 1)} \cdot (\lambda p e^t)$$

$$EX = M'_X(0) = \lambda p$$

$$3. M''_X(t) = e^{\lambda p (e^t - 1)} \cdot (\lambda p e^t)^2 + e^{\lambda p (e^t - 1)} \cdot (\lambda p e^t)$$

$$EX^2 = M''_X(0) = (\lambda p)^2 + \lambda p$$

【版權所有，重製必究！】

二、設 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，為一組獨立之常態分配。

(一)試說明：

1. $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$ 之精確分配。(10分)

2. 計算期望值 $E\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2\right)$ 。(5分)

3. 變異數 $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2\right)$ 。(5分)

(二)當 $n \rightarrow \infty$ ，試寫出 $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$ 之極限分配。(5分)

答：

(一) 1. $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$

2. $E\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2\right] = n \text{ (df)}$

3. $\text{Var}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2\right] = 2n$

(二) $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(\mu = n, \sigma^2 = 2n)$

三、若 $\{X_i\}_1^n \sim U(\theta, 1)$ 為一組來自均勻分配在區間 $(\theta, 1)$ 之獨立同態的隨機樣本。

(一)試寫出 θ 之參數空間。(5分)

(二) 1. 試求 θ 之動差估計式， $\widehat{\theta}_{MM}$ 。(5分)

2. 試求一常數 c 使 $c\widehat{\theta}_{MM}$ 為 θ 之一不偏估計式。(5分)

(三)試求 θ 之最大概似估計式， $\widehat{\theta}_{MLE}$ 。(10分)

答：

(一) $\Theta = \{\theta | \theta < 1\}$

(二) 1. $\because EX = \frac{\theta+1}{2} \Rightarrow \bar{X} = \frac{\widehat{\theta}_{MM}+1}{2} \therefore \widehat{\theta}_{MM} = 2\bar{X} - 1$

2. $E\widehat{\theta}_{MM} = E(2\bar{X} - 1) = 2 \cdot \frac{\theta+1}{2} - 1 = \theta \text{ (unbiased)}$

$\therefore c = 1$

(三) $L(\theta) = \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n I_{(-\infty, X_{(1)})}(\theta)$ 【版權所有，重製必究！】

$\because$ 當 $\theta = X_{(1)}$ 時， $L(\theta)$ 達 max

∴ $\hat{\theta} = X_{(1)}$ 爲 θ 之 MLE

四、設 $\{(x_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ 滿足一無截距之簡單線性迴歸模型 $Y_i = \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ，設 $E(\varepsilon_i) = 0$ ， $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ ， $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ ， $i \neq j$ 。

(一)試求 β_1 之最小平方估計式 (LSE)。(10分)

(二)吾人若欲對此模型作推論，則於 ε_i 需加上何種分配的假設？(5分)

(三)在題(二)之假設下，給定 $\alpha \in (0, 1)$ 之顯著水準，如何檢定此迴歸線是否顯著？(10分)

答：

(一)令 $Q = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta} x_i)^2$

$$\frac{dQ}{d\hat{\beta}} = -2 \sum_{i=1}^n [(Y_i - \hat{\beta} x_i) \cdot x_i] = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{OLSE})$$

(二) $\varepsilon_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$

(三) $\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2})$

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0 : \beta = 0 & (\text{迴歸線不顯著}) \\ H_1 : \beta \neq 0 & (\text{迴歸線顯著}) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} C = \left\{ T \mid |T| > \frac{t_{\alpha/2}}{2}(n-1) \right\}$$

$$\textcircled{3} |T| = \left| \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\frac{\text{MSE}}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}} \right| = \begin{cases} \in C \Rightarrow \text{有充分證據顯示迴歸線顯著} \\ \notin C \Rightarrow \text{無充分證據顯示迴歸線顯著} \end{cases}$$

【版權所有，重製必究！】