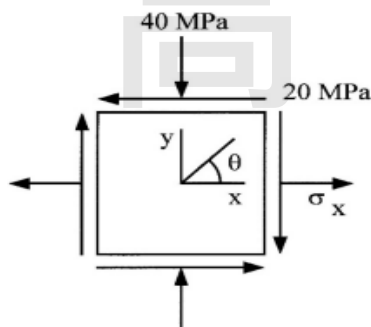


《靜力學與材料力學》

一、有一平面應力元素受應力如下圖所示，如此元素之最大主軸應力 σ_1 為10 MPa，請計算 σ_x 、最小主軸應力 σ_2 、最大剪應力 $\tau_{\max}$ 、最大主軸應力之方向及最小主軸應力之方向。(25分)

提示： $\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$



試題評析	屬於簡單的應力轉換考題，比較不同的是先給最大主應力值要反求x向正向應力，但觀念與步驟跟一般考題沒有太大區別。
考點命中	1. 《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題6.2.4。 2. 《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題6.2.3。

答：

1. 寫出正向應力 σ_x 、 σ_y 及剪應力 τ_{xy} 值

採用拉逆為正符號系統，此時 σ_x 未知、 $\sigma_y = -40$ MPa、 $\tau_{xy} = -20$ MPa。

2. 由應力莫爾圓觀念解 σ_x 、最小主軸應力 σ_2 與最大剪應力 $\tau_{\max}$

莫爾圓圓心及半徑計算如下：

$$\text{圓心}(\sigma_{\text{avg}}, 0) = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) = \left(\frac{\sigma_x - 40}{2}, 0 \right)$$

$$\text{半徑 } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + 40}{2} \right)^2 + (-20)^2}$$

由應力莫爾圓可知最大主軸應力 $\sigma_1 = \text{圓心} + \text{半徑}$ ：

$$\text{最大主軸應力 } \sigma_1 = 10 = \text{圓心} + \text{半徑} = \frac{\sigma_x - 40}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + 40}{2} \right)^2 + (-20)^2}$$

$$\Rightarrow 30 - \frac{\sigma_x}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + 40}{2} \right)^2 + 400}, \text{ 接著讓等號左右兩側都平方}$$

$$\Rightarrow 900 + \frac{\sigma_x^2}{4} - 30\sigma_x = \frac{\sigma_x^2 + 1600 + 80\sigma_x}{4} + 400 \Rightarrow 50\sigma_x - 100 = 0$$

$\Rightarrow \sigma_x = 2 \text{ MPa}$ (拉應力)，再將 $\sigma_x = 2 \text{ MPa}$ 代回得到莫爾圓的圓心與半徑值：

$$\text{圓心 } (\sigma_{\text{avg}}, 0) = \left(\frac{2 - 40}{2}, 0 \right) = (-19, 0)$$

$$\text{半徑 } R = \sqrt{\left(\frac{2+40}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 29$$

$$\text{最小主軸應力 } \sigma_2 = \text{圓心} - \text{半徑} = -19 - 29 = -48 \text{ MPa (壓應力)}$$

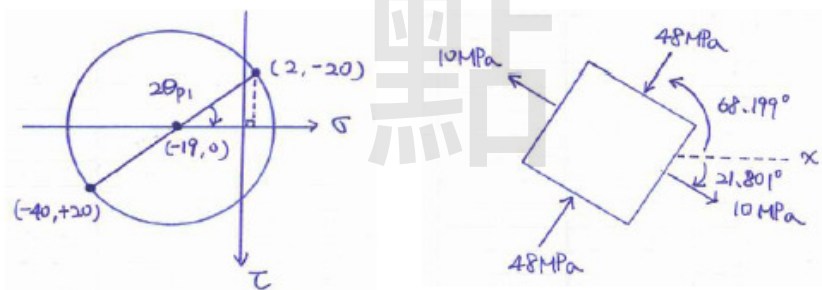
$$\text{最大剪應力 } \tau_{\text{max}} = \text{莫爾圓半徑 } R = 29 \text{ MPa}$$

3. 計算最大主軸應力方向及最小主軸應力方向

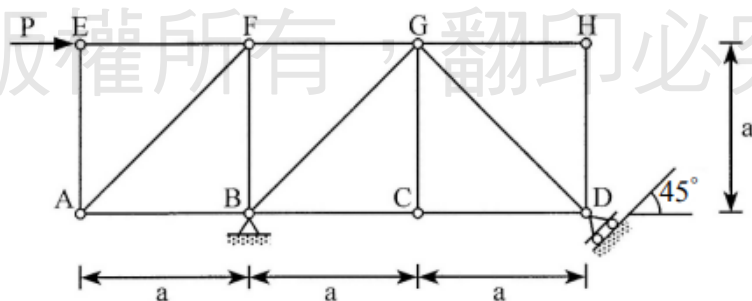
由應力莫爾圓可得 $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (2, -20)$ 與 σ_1 間夾角 $2\theta_{P1}$ 之幾何關係：

$$\tan 2\theta_{P1} = \frac{-20}{2 - (-19)} \Rightarrow \theta_{P1} = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{-20}{21}\right) = -21.801^\circ (\cup)$$

這代表從 x 軸順時針旋轉 21.801° 會得到最大主軸應力 $\sigma_1 = 10 \text{ MPa}$ ；由於兩主軸在平面座標相差 90° ，因此將 θ_{P1} 加上 90° 後可得 θ_{P2} ，故 $\theta_{P2} = \theta_{P1} + 90^\circ = 68.199^\circ$ ，這代表從 x 軸逆時針旋轉 68.199° 會得到最小主軸應力 $\sigma_2 = -48 \text{ MPa}$ 。



二、有一桁架如下圖，B 點為鉸支撐，D 點為與水平呈 45° 之滾支撐。E 點受一集中水平力 P 。試求 B 點及 D 點之反力及方向、各桿件軸力（請重畫該桁架，將軸力寫在各桿件旁，張力為正，壓力為負）。（25 分）

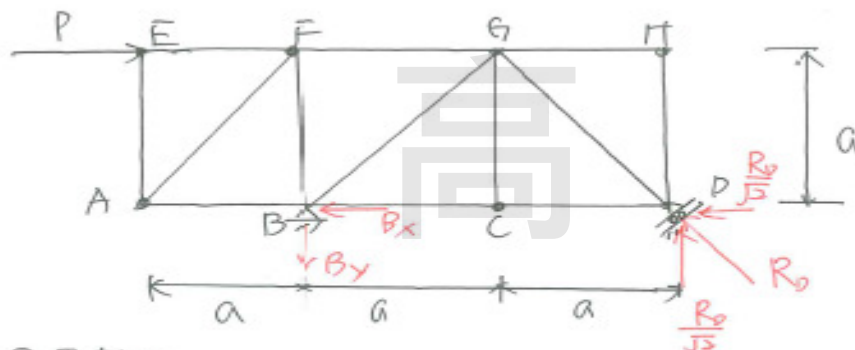


試題評析 屬於靜定簡單桁架內力分析，屬於基本題型。

考點命中 與洪達老師《突破靜力學》P2-84題型相同。

答：

(1)



① 取整體：

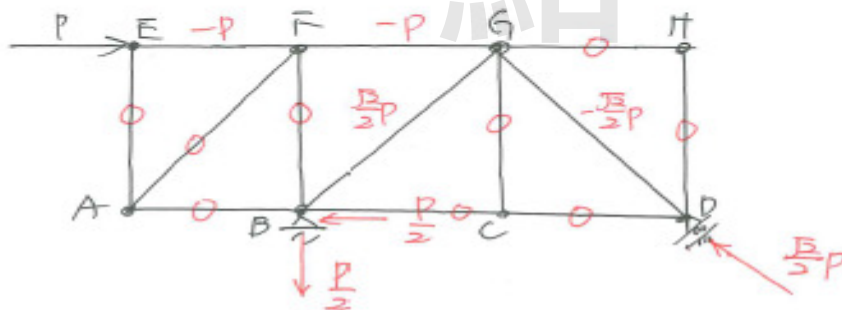
$$\sum M_B = 0 \quad \text{①}$$

$$\Rightarrow \frac{P_D}{\sqrt{2}}(2a) - P(a) = 0 \Rightarrow R_D = \frac{\sqrt{2}}{2}P \quad (\nearrow)$$

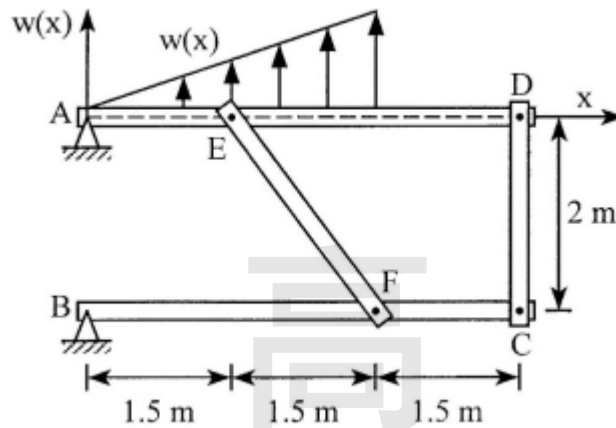
$$\therefore \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = \frac{P}{2} (\leftarrow)$$

$$\therefore \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{P}{2} (\downarrow)$$

② 再利用節點法求各桿件之內力：



三、下圖之構造系統中 A 與 B 點為鉸支撐(hinge)，其它接點均為栓接(pin)。圖中分佈載重 $w(x)$ 之單位為 kN/m ，且 $w(x) = 400x$ ($0 \leq x \leq 3$)。試計算 A 點與 B 點支承處之水平與垂直反力（請標示力的大小與方向），以及 EF 桿與 CD 桿之內力（請註明為壓力或張力）。（25 分）

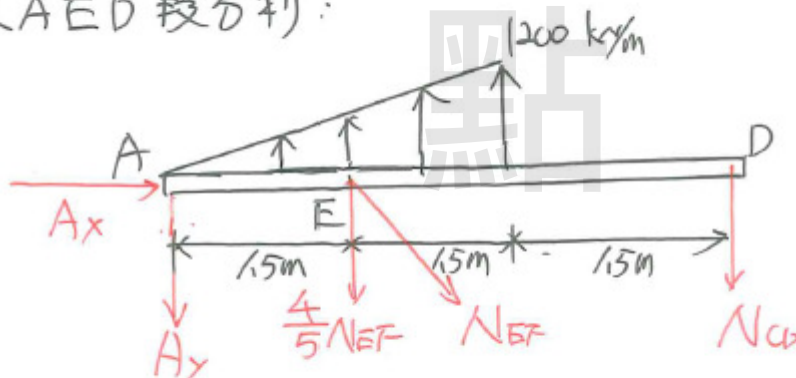


試題評析	屬於平面剛體平衡基本題型。
考點命中	與洪達老師《突破靜力學》P2-58題型相同。

答：

① EF、CD 桿為二力桿件
假設 N_{EF} (拉), N_{CD} (拉)

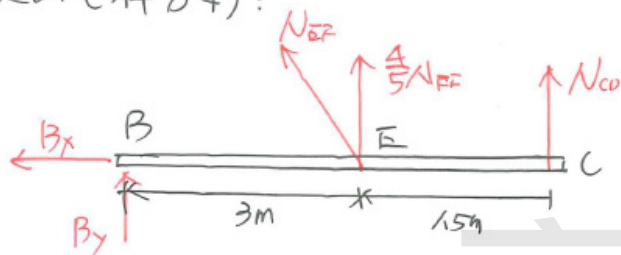
② 取 AED 段分析：



$$\therefore \sum M_A = 0 \quad (+\curvearrowright)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} N_{EF} \times 1.5 + N_{CD} \times 4.5 - \left(\frac{1}{2}\right)(200)(3)\left(\frac{2}{3} \times 3\right) = 0 \quad (1)$$

② 取 BFC 桿分析：



$$\therefore \sum M_B = 0 \quad (\uparrow)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} N_{EF} \times 3 + N_{EC} (4.5) = 0 \quad (2)$$

$\therefore$ 由(1)(2)求得：

$$N_{EF} = -3000 \text{ (kN)} \Rightarrow N_{EF} = 3000 \text{ (kN)} \text{ (TE)}$$

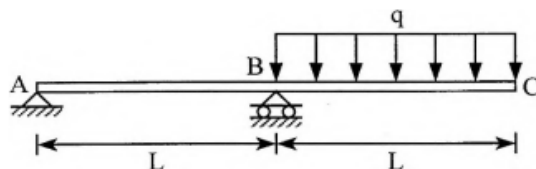
$$\therefore N_{EC} = 1600 \text{ (kN)} \text{ (TE)}$$

③ 代回 AED 自由體： $\sum F_x = 0$ ， $\sum F_y = 0 \Rightarrow A_x = 1800 \text{ (kN)} (\rightarrow)$ ， $A_y = 2600 \text{ (kN)} (\downarrow)$

$$\text{BEC 自由體，} \sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \Rightarrow B_x = 1800 \text{ (kN)} (\leftarrow)$$

$$B_y = 800 \text{ (kN)} (\uparrow)$$

四、下圖有一 ABC 梁 A 點為鉸支撐，B 點為滾支撐。梁於 BC 段受均佈載重 q ，試求 A 點及 B 點之反力（請註明作用之方向）、A 點之轉角（請註明轉角之方向）、C 點之轉角及位移（請註明轉角及位移之方向）。（25 分）



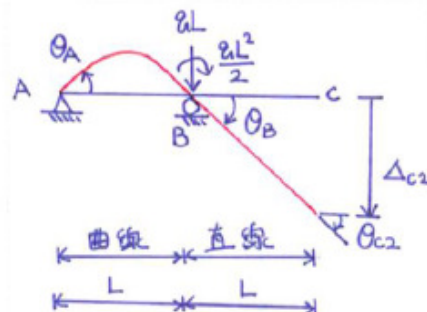
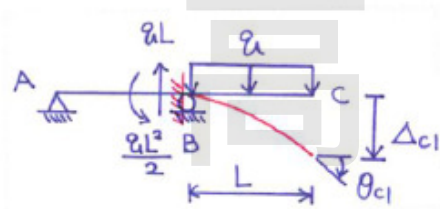
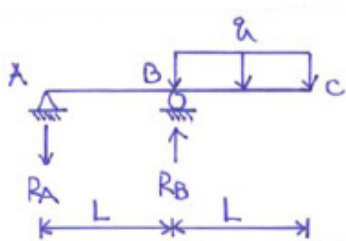
試題評析	屬於簡單的求反力與位移轉角題型，採用鎖住與開鎖是最快的方法，倘若考場上不熟悉此方法亦可用它法，只不過速度就稍嫌慢點。
考點命中	1. 《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.3.19。 2. 《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.3.22。

答：

1. 計算 A 點及 B 點支承反力

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A \text{ 點垂直向反力 } R_A = \frac{(qL)(L/2)}{L} = \frac{qL}{2} \quad (1), \text{ 另外 A 點無水平向反力}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B \text{ 點垂直反力 } R_B = R_A + qL = \frac{3qL}{2} \quad (2)$$



2. 鎖住階段

先將 B 點鎖住不動，此階段於 B 點加一虛擬固定端，此時 BC 段可看成一根懸臂梁，此步驟稱之為「鎖住」。BC 桿在此階段受到均佈載重 q 作用，由基本變位公式求 C 點撓度 Δ_{c1} (撓度以向下為正) 與 C 點轉角 θ_{c1} (轉角以順時針為正)：

$$\Delta_{c1} = \frac{qL^4}{8EI} \quad (1)$$

$$\theta_{c1} = \frac{qL^3}{6EI} \quad (2)$$

3. 開鎖階段求解 A 點轉角與 C 點轉角及位移

鎖住時 B 點因視為固定端，故向下均佈載重 q 會造成 B 點有向上 qL 反力及逆時針 $qL^2/2$ 反力矩。有借有還、再借不難，前步驟用過鎖住，接著要把力量還回去的動作稱之為「開鎖」。開鎖時會把鎖住步驟借來的力量反向吐回去，因此 B 點會有向下 qL 力量及順時針 $qL^2/2$ 力矩，由基本變位公式可算出順時針力矩 $qL^2/2$ 造成 A 點轉角 θ_A 、C 點撓度 Δ_{c2} 與 C 點轉角 θ_{c2} ：

$$A \text{ 點轉角 } \theta_A = \frac{(\frac{qL^2}{2})(L)}{6EI} = \frac{qL^3}{12EI} \quad (3)$$

$$\Delta_{C2} = \theta_B L = \frac{(\frac{qL^2}{2})(L)}{3EI} = \frac{qL^4}{6EI} \quad (\downarrow)$$

$$\theta_{C2} = \theta_B = \frac{qL^3}{6EI} \quad (\curvearrowright)$$

$$C \text{ 點轉角 } \theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2} = \frac{qL^3}{6EI} + \frac{qL^3}{6EI} = \frac{qL^3}{3EI} \quad (\curvearrowright)$$

$$C \text{ 點位移 } \Delta_C = \Delta_{C1} + \Delta_{C2} = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{qL^4}{6EI} = \frac{7qL^4}{24EI} \quad (\downarrow)$$

點

【版權所有，翻印必究】