《統計學(A)-統計》

一、若隨機變數$Y|X=x\sim U(0,x)$且$X\sim U(0,1)$，其中U代表連續均勻分配。

試求：

(一)(X,Y)的聯合密度函數$f_{XY}(x,y)$。(5分)

(二)Y的機率密度函數$f_Y(y)$。(5分)

(三)$E(Y)$、$Var(Y)$、$E(XY)$、$Cov(X,Y)$、ρ_{XY}。(15分)

試題評析	本題為聯合機率分配與邊際機率分配的觀念，注意積分不要出錯得分並不困難。

答：

(一)

$$f_{XY}(x,y)=f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x},0<y<x<1$$

(二)

$$f_Y(y)=\int_y^1 f_{XY}(x,y)\,dx=\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y,0<y<1$$

(三)

$$E(Y)=\int_0^1 y\cdot f_Y(y)\,dy=\int_0^1 -y\ln y\,dy=\frac{1}{4}$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 y^2\cdot f_Y(y)\,dy=\int_0^1 -y^2\ln y\,dy=\frac{1}{9}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^x xy\cdot f_{XY}(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^x y\,dy\,dx=\frac{1}{6}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{\frac{1}{24}}{\sqrt{\frac{1}{12}\times\frac{7}{144}}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

二、已知變異數是25，平均數μ未知之常態分配中取出樣本大小為n之隨機樣本$X_1,X_2,...,X_n$，在顯著水準$\alpha=0.05$下，檢定假設$H_0:\mu=30$ vs. $H_1:\mu<30$。若希望$\mu=26.7$時之檢定力達0.975，則需要多少樣本數？(25分)

試題評析	假設檢定中求樣本數的常見題型，只要觀念清晰就不會出錯。

答：

$\{X_i\}_{i=1}^n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu,5^2)$

$H_0:\mu=30$ vs $H_1:\mu<30$

$$\varphi=\frac{\bar{X}-30}{5/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$\alpha=0.05,RR=\{\varphi|\varphi<-z_{0.05}=-1.645\}$

拒絕域可改寫為

$$RR=\left\{\bar{X}\middle|\bar{X}<30-1.645\frac{5}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$power=P\left(\bar{X}<30-1.645\frac{5}{\sqrt{n}}\middle|\mu=26.7\right)=0.975$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\bar{X}-26.7}{5/\sqrt{n}}<\frac{3.3-1.645\frac{5}{\sqrt{n}}}{5/\sqrt{n}}\right)=0.975$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{3.3\sqrt{n}}{5}-1.645\right)=0.975$$

$$\Rightarrow \frac{3.3\sqrt{n}}{5}-1.645=z_{0.025}=1.96$$

$$\Rightarrow n=29.835$$

取樣本數為30

三、欲比較三種不同的植物荷爾蒙（A、B、C）對癒傷組織新芽分化的影響。每種植物荷爾蒙均重複五次實驗，分別測量所誘導出的新芽長度（cm），得到資料如下：

荷爾蒙		
A	B	C
1.7	0.4	1.1
1.6	0.5	1.0
1.5	0.3	0.7
1.9	0.2	0.8
1.2	0.3	0.5

(一)試列出變異數分析（ANOVA）表及詳細計算過程。（10分）
(二)試問3種植物荷爾蒙對誘導出的新芽長度的效果是否相等（$\alpha=0.05$）？請詳細寫出a. 虛無與對立假設、b. 檢定統計量公式、c. 拒絕域、d. 檢定值之計算過程、e. 檢定結果與結論。（10分）
(三)資料需符合那3個假設？（5分）

試題評析	本題為單因子變異數分析，年年出現一定要會。

答：
（一）

$$SST=1.7^2+1.6^2+1.5^2+\cdots+0.5^2-\frac{13.7^2}{15}=4.4573$$

$$SSF=\frac{7.9^2}{5}+\frac{1.7^2}{5}+\frac{4.1^2}{5}-\frac{13.7^2}{15}=3.9093$$

$$SSE=SST-SSF=0.548$$

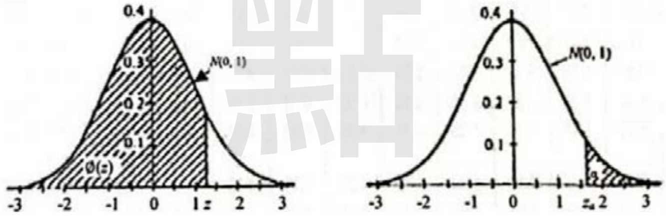
ANOVA 表				
Source	SS	df	MS	F
Factor	3.9093	2	1.9547	42.8029
Error	0.548	12	0.0457	
Total	4.4573	14		

（二）
H_0: 不同荷爾蒙效果相等 vs H_1: 不同荷爾蒙效果不全相等

$$\varphi=\frac{MSF}{MSE}\sim F(2,12)$$

$\alpha = 0.05, RR = \{\varphi | \varphi > F_{0.05}(2,12) = 3.89\}$
$\varphi^* = 42.8029 \in RR$
∴ 拒絕虛無假設
我們有足夠證據推論不同荷爾蒙效果不全相等
（三）
常態、獨立、同質性

四、某電子公司想瞭解某電子組件之壽命，於是隨機取出樣本大小為n=10的隨機樣本 $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ ，其中 X_i 表示每個電子組件之壽命。若得到的樣本數據為9，3，5，7，2，3，1，4，8，4（單位：10,000小時），請使用符號檢定方法，以$\alpha = 0.05$來檢定電子組件之壽命的中位數是否有顯著超過2.5萬小時？（25分）
附表一：Z值表



$$P(Z \le z) = \phi(z) = \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw$$
$[\phi(-z) = 1 - \phi(z)]$

試題評析	無母數統計中符號檢定的題目，近年無母數統計常出現在高普考中，不可不慎。

答：
令中位數為 me （單位：10,000小時）
$H_0: me = 2.5$ vs $H_1: me > 2.5$
題目中樣本數為10，其中有8筆資料大於2.5。令 $W \sim Binomial(10, 0.5)$，此檢定的 p-值為

$$p - value = P(W \ge 8) = \sum_{w=8}^{10} \binom{10}{w} 0.5^{10} = \frac{7}{128} > 0.05$$

∴ 無法拒絕虛無假設
我們沒有足夠證據推論電子組件壽命的中位數超過 2.5 萬小時