

《統計學》

試題評析	今年的試題大部分都是觀念題，如果能夠拿到80分，就能達到上榜的水準了。
考點命中	第一題：《高點統計學講義第三回》，秦大成編撰，頁137-138、《高點統計學講義第四回》，秦大成編撰，頁25。都有詳細定義。 第二題：《高點統計學講義第一回》，秦大成編撰，頁82例題1。 第三題：《高點統計學講義第三回》，秦大成編撰，頁25、31都有詳細定義。 第四題：《高點迴歸講義第一回》，秦大成編撰，頁12例題5。 第五題：《高點統計學講義第五回》，秦大成編撰，頁83例題2。 第六題：《高點迴歸講義第一回》，秦大成編撰，頁133例題70。

一、回答下列問題：（每小題5分，共20分）

- (一)「統計量 (Statistics)」與「估計量 (Estimator)」有何差異？
- (二)「母體分配 (Population Distribution)」與「抽樣分配 (Sampling Distribution)」有何差異？
- (三)「偏誤 (Bias)」與「估計誤差 (Error of Estimation)」有何差異？
- (四)「標準差 (Standard Deviation)」與「標準誤差 (Standard Error)」有何差異？

答：

(一)可用來估計參數的統計量稱為估計量，換言之，估計量為統計量，但統計量未必是估計量。

(二)母體分配：隨機樣本的母體之p.d.f。

抽樣分配：以隨機樣本為變數的統計量之p.d.f。

(三) $Bias = E\hat{\theta} - \theta$ ，其中 $\hat{\theta}$ 為參數 θ 之估計式。

估計誤差 $e_1 = X_1 - \mu_1$ ，其中 X_1 ：從母體隨機抽得之樣本， μ_1 ：母體平均數。

(四)標準差：隨機樣本的母體之標準差。

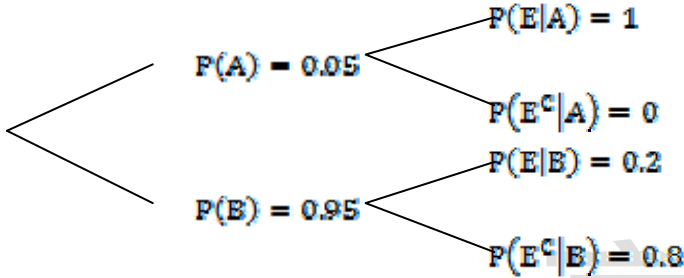
標準誤差：統計量之標準差。

二、信用卡公司主管根據過去紀錄，發現其公司有5%之信用卡客戶是不良的客戶，公司每年因為詐欺行為而造成的損失都非常可觀。該公司主管為了能夠更精確偵測客戶的詐欺行為，遂利用統計分析的方法來分析信用卡客戶可能的詐欺行為。根據過去客戶的消費及繳費資料，發現如果客戶是不良的客戶，則其繳費帳單逾繳超過二次以上之機率為100%；如果是一般的客戶，則其繳費帳單逾繳超過二次以上之機率為20%。

- (一)如果現在有一客戶其繳費帳單已經逾繳二次，此客戶可能是不良的客戶之機率為何？（10分）
- (二)如果此信用卡公司新的政策是如果一客戶可能成為不良的客戶之機率超過20%時，該信用卡公司便會取消該客戶之信用卡，請問(一)之客戶是否會被取消信用卡？（5分）

答：

設A：不良客戶，B：一般客戶，E：帳單逾繳二次以上之事件



$$(一) P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0.05 \times 1}{(0.05 \times 1) + (0.95 \times 0.2)} = \frac{5}{24} = 0.2083$$

$$(二) P(A|E) = 0.2083 > 0.2$$

∴ (一)之客戶不會被取消信用卡

- 三、(一)請寫出卜瓦松分配 (Poisson Distribution) 公式，並說明公式中符號所代表之意義。(3分)
- (二)請寫出指數分配 (Exponential Distribution) 公式，並說明公式中符號所代表之意義。(3分)
- (三)請說明卜瓦松分配與指數分配的差異點。(4分)

答：

$$(一) f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$$

其中，x：單位時間內，事件發生次數

λ ：單位時間內，事件平均發生次數

$$(二) f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0$$

其中，x：單位時間內，發生一次事件所需時間

λ ：單位時間內，事件平均發生次數

(三)卜松分配：隨機變數X，指等候事件發生的次數

指數分配：隨機變數X，指等候事件發生的時間

四、若從一組成對資料 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ；得到迴歸方程式為 $\hat{y} = 6 - 8x$ ， $n = 10$ ， $\bar{x} = 50$ ， $\bar{y} = 100$ ， $\gamma_{xy} = -0.7$ 。(每小題10分，共20分)

(一)若重新令 $x' = x - \bar{x}$ ， $y' = y - \bar{y}$ ，再利用 y' 對 x' 建立迴歸方程式 $\hat{y}' = \hat{\beta}_0' + \hat{\beta}_1' x'$ ，求 $\hat{\beta}_0' = ?$
 $\hat{\beta}_1' = ?$

(二)若重新令 $x^* = \frac{x - \bar{x}}{S_x}$ ， $y^* = \frac{y - \bar{y}}{S_y}$ ，再利用 y^* 對 x^* 建立迴歸方程式 $\hat{y}^* = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x^*$ ，求 $\hat{\beta}_0^* = ?$
 $\hat{\beta}_1^* = ?$

答：

(一) $x' = x - \bar{x}$, $y' = y - \bar{y}$: 資料平移則 中心點 (\bar{x}, \bar{y}) 平移到 $(0, 0)$

$$\therefore \beta'_0 = 0$$

$$\beta'_1 = \beta_1 = -8 \text{ (資料平移, 斜率不變)}$$

(二) $\beta'_0 = 0$

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= \frac{(\Delta y)'_n}{(\Delta x)'_n} = \frac{\Delta y \Delta x}{\Delta x \Delta x} = \beta_1 \times \frac{\Delta x}{\Delta x} = r_{XY} \\ &= -0.7 \end{aligned}$$

五、設 $X_1, X_2, \dots, X_{10} \stackrel{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$ ，若 $H_0: p=0.3$ vs. $H_1: p=0.6$ ，令 $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ ，拒絕域 $C = \{Y \geq 8\}$ ，試求：(每小題10分，共20分)(一) 型一錯誤的機率 (α 風險)。(二) 型二錯誤的機率 (β 風險)。

答：

$$\begin{aligned} \text{(一)} \quad \alpha &= P(I) = P(Y \geq 8 | P = 0.3 \in H_0) = 1 - P(Y \leq 7 | P = 0.3 \in H_0) \\ &= 1 - 0.9984 = 0.0016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(二)} \quad \beta &= P(II) = P(Y < 8 | P = 0.6 \in H_1) \\ &= P(Y \leq 7 | P = 0.6 \in H_1) = 0.8327 \end{aligned}$$

六、已知： $\sum_{i=1}^{12} X_i = 408$ ， $\sum_{i=1}^{12} X_i^2 = 18,447$ ， $\sum_{i=1}^{12} Y_i = 828$ ， $\sum_{i=1}^{12} Y_i^2 = 71,061$ ， $\sum_{i=1}^{12} X_i Y_i = 31,237$ 。迴歸模型為 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ 時：(每小題5分，共15分)

(一) 試求最小平方迴歸直線。

(二) 在0.05的顯著水準下，檢定迴歸線是否通過原點？

(三) 在0.05的顯著水準下，檢定迴歸線是否與X軸平行？

(三) 在0.05的顯著水準下，檢定迴歸線是否與X軸平行？

答：

$$S_{XY} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} = 31237 - \frac{408 \times 828}{12} = 3085 \text{ 【版權所有 重製必究！】}$$

$$S_{XX} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 18447 - \frac{(408)^2}{12} = 4575$$

$$S_{YY} = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} = 71061 - \frac{(828)^2}{12} = 13929$$

$$(一) \hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = 0.6743$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \frac{828}{12} - 0.6743 \times \frac{408}{12} = 46.0738$$

$$\therefore \text{最小平方迴歸直線 } \hat{Y}_i = 46.0738 - 0.6743x_i$$

$$(二) SSTO = S_{YY} = 13929$$

$$SSR = \frac{S_{KY}^2}{S_{XX}} = 2080.2678$$

$$SSE = SSTO - SSR = 11848.7322$$

$$MSE = \frac{SSE}{n-2} = 1184.8732$$

$$\bar{x} = \frac{408}{12} = 34$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0 : \beta_0 = 0 \\ H_1 : \beta_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} C = \left\{ T \mid |T| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} = t_{\frac{0.05}{2}, 12-2} = 2.2281 \right\}$$

$$\textcircled{3} |T| = \left| \frac{\hat{\beta}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{XX}}\right)MSE}} \right| = \frac{46.0738}{\sqrt{\left(\frac{1}{12} + \frac{34^2}{4578}\right) \times 1184.8732}} = 2.309 \in C$$

\therefore reject H_0 ，有充分證據顯示迴歸線不通過原點

$$(三) \textcircled{1} \begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

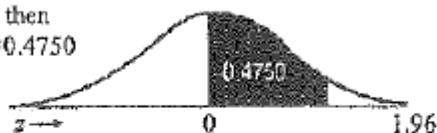
$$\textcircled{2} C = \left\{ T \mid |T| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} = t_{\frac{0.05}{2}, 12-2} = 2.2281 \right\}$$

$$\textcircled{3} |T| = \left| \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}} \right| = \frac{0.6743}{\sqrt{\frac{1184.8732}{4578}}} = 1.32 \notin C \quad \text{【版權所有，重製必究！】}$$

\therefore Do not reject H_0 ，無充分證據顯示迴歸線與 X 軸不平行

表一

Example:
If $z=1.96$, then
 $P(0 \text{ to } z)=0.4750$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1735	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4915
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4958	0.4959	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4985	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

【版權所有，重製必究！】