《迴歸分析》

試題評析	今年的試題有一半題目是矩陣而且有偏難，如果能夠拿到80分，就本科目而言，上榜應該沒問題。
考點命中	第一題：《高點迴歸分析講義第一回》，秦大成編撰，頁55例題6。 第二題：《高點迴歸分析講義第一回》，秦大成編撰，頁79例題2。 第三題：《高點迴歸分析講義第二回》，秦大成編撰，頁93例題1。 第四題：《高點迴歸分析講義第三回》，秦大成編撰，頁15例題1。

一、對以下之簡單線性迴歸模式

$$Y_i = 1+\beta_1 X_i+\varepsilon_i，\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)，i=1,\ldots,n，$$

X_i 為已知自變數（independent variable）且不全為0。令 $\hat{\beta}_1$ 是參數 β_1 之最小平方估計量（least squares estimator）及 $\alpha = e^{\beta_1}$。（每小題10分，共20分）

(一)請找出參數α之最大概式估計量（maximum likelihood estimator）。

(二)請求出 $\hat{\beta}_1$ 之期望值 $E(\hat{\beta}_1)$ 及變異數 $Var(\hat{\beta}_1)$（請詳列推導過程）。

答：

(一) $L(\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i-1-\hat{\beta}_1 x_i)^2}{2\hat{\sigma}^2}}$

$$\ln L = -\frac{n}{2}(\ln 2\pi + \ln\hat{\sigma}^2) - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - 1 - \hat{\beta}_1 x_i)^2}{2\hat{\sigma}^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\beta}_1} = \frac{\sum_{i=1}^n [(Y_i - 1 - \hat{\beta}_1 x_i)\cdot x_i]}{\hat{\sigma}^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i{}^2 = 0$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i{}^2} \text{ 為}\beta_1\text{之MLE}$$

根據MLE不變性

$$\hat{\alpha} = e^{\hat{\beta}_1} = e^{\frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i{}^2}} \text{ 為 } \alpha = e^{\beta_1}\text{之MLE}$$

(二)(1) $E(\hat{\beta}_1) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i{}^2}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i(1+\beta_1 x_i)] - \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i{}^2} = \frac{\beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i{}^2} = \beta_1$

(2) $V(\hat{\beta}_1) = V\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i{}^2}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i^2 \cdot V(Y_i)]}{(\sum_{i=1}^n x_i{}^2)^2} = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i{}^2)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

二、(x_i, y_i)，$i=1,\ldots,10$，為對應以下簡單線性迴歸模式

$$Y_i = \beta_0+\beta_1 X_i+\varepsilon_i，\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)，i=1,\ldots,10，$$

之觀察值。對以下 x_i 值時，y_i 有重覆觀察值：

x_i 值	重覆觀察 y_i 值
90	81, 83
66	68, 60, 62
51	60, 64
35	51, 53

令 $\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$ 為 β_0 及 β_1 之最小平方估計量之值。給定以下結果：

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 44,249 \text{，} \sum_{i=1}^{10}(y_i - \hat{y}_i)^2 = 118.44 \text{，} \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \text{。}$$

(一)試完成以下對應虛無假設(null hypothesis)

$H_0：\beta_0 = \beta_1 = 0$之變異數分析表(ANOVA table)：(1)～(8)

來源	自由度(degree of freedom)	平方和(sum of squares)	均方和(mean square)	F
迴歸(Regression)	2	(3)	(6)	(8)
殘差(Error)	(1)	(4)	(7)	
總和	(2)	(5)		

並寫出F統計量之虛無分布(null distribution)，即F統計量在虛無假設成立時之機率分布。(15分)

(二)請算出缺適(lack of fit or goodness of fit)檢定統計量之值。並明確寫出檢定統計量之虛無分布。(10分)

答：

(一)本題有誤：

(1)目：$i = 1, 2, \cdots, 10$，但表格：$n = 9$，解題採：$n = 9$對

(2)ANOVA table：只能檢定係數是否全為0 ⇔ 檢定$H_0：\beta_1 = 0$

不能檢定 $H_0：\beta_0 = \beta_1 = 0$

(3)ANOVA table：SSR自由度$= 1$，不是2

x_i值	y_i	個數	列和
90	81 83	$n_1 = 2$	$T_{1\bullet} = 164$
66	68 60 62	$n_2 = 3$	$T_{2\bullet} = 190$
51	60 64	$n_3 = 2$	$T_{3\bullet} = 124$
35	51 53	$n_4 = 2$	$T_{4\bullet} = 104$
和		$n = 9$	$T_{\bullet\bullet} = 582$

$SSTO = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n} = 38624 - \frac{582^2}{9} = 988$

(題目給$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 44249$)

$SSR = SSTO - SSE = 988 - 118.44 = 869.56$

(1) ANOVA table：

來源	df	SS	MS	F
迴歸	1	869.56	869.56	51.39
殘差	7	118.44	16.92	
總和	8	988		

(2)①若 $H_0：\beta_1 = 0 \Rightarrow F = \frac{MSR}{MSE} \underset{\sim}{H_0\text{真}} F(1, n-k) = F(2, 7)$

②若 $H_0：\beta_0 = \beta_1 = 0 \Leftrightarrow [C]_{S\times k} \cdot [\beta]_{k\times 1} = [h]_{S\times 1}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$F=\frac{[SSE(R)-SSE(F)]/_{s}}{SSE(F)/_{(n-k)}}\ F=\frac{MSR}{MSE}\ \overset{H_0真}{\sim}\ F(s,\quad n-k)=F(2,\quad 7)$$

(二)$SSP=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}Y_{ij}^2-\sum_{i=1}^{k}\frac{T_{i\bullet}^2}{n_i}=38624-38577.3333=46.6667$

$SSL=SSE-SSP=118.44-46.6667=71.7733$

(1) $F=\frac{SSL/(k-2)}{SSP/(n-k)}=\frac{71.7733/(4-2)}{46.6667/(9-4)}=3.845$

(2) $F\ \overset{H_0真}{\sim}\ F(k-2,n-k)=F(4-2,9-4)=F(2,5)$

三、(x_{i1},x_{i2},y_i)，$i=1,\ldots,4$ 為對應以下多重線性迴歸模式

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\varepsilon_i，\varepsilon_i\overset{iid}{\sim}N(0,\sigma^2)，i=1,\ldots,4，$$

之觀察值。令$\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$及$\hat{\beta}_2$為β_0、β_1及β_2之最小平方估計量或其值。X為自變數矩陣，

$$X=\begin{bmatrix}1 & x_{11} & x_{12}\\ 1 & x_{21} & x_{22}\\ 1 & x_{31} & x_{32}\\ 1 & x_{41} & x_{42}\end{bmatrix}。$$

給定以下之結果：

$$X^tX=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}，\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_0\\ \hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5\\0\\-1.5\end{bmatrix}，\sum_{i=1}^{4}(y_i-\hat{y}_i)^2=0.5，$$

$$\sum_{i=1}^{4}y_i=10，\hat{y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_{i1}+\hat{\beta}_2x_{i2}。$$

(一)算出$\hat{\beta}$之共變異數矩陣（covariance matrix），即$Cov(\hat{\beta},\hat{\beta})$。（5分）

(二)算出R^2。（5分）

(三)給定$\alpha=0.05$，利用t統計量檢定

$H_0：\beta_2+1\geq 0$ versus $H_0：\beta_2+1<0$。（10分）

（$t_{2,0.05}=2.92$，$t_{2,0.025}=4.303$，$t_{1,0.05}=6.314$，$t_{1,0.025}=12.706$）

(四)給定$\alpha=0.05$，利用F統計量檢定

$H_0：\beta_0=\beta_1=\beta_2=0$ versus $H_1：\beta_0\neq 0$ or $\beta_1\neq 0$ or $\beta_2\neq 0$。（10分）

（$F_{3,1,0.05}=216$，$F_{3,2,0.05}=19.2$，$F_{2,1,0.05}=200$，$F_{2,2,0.05}=19$）

(五)算出β_1之95%之信賴區間。（5分）

答：

(一) $$COV(\hat{\beta},\hat{\beta})=(X^TX)^{-1}\cdot\sigma^2=\begin{bmatrix}\frac{\sigma^2}{4}&0&0\\0&\frac{\sigma^2}{4}&0\\0&0&\frac{\sigma^2}{2}\end{bmatrix}$$

(二) $\hat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^TY$

$$\Rightarrow X^TY=(X^TX)\cdot\hat{\beta}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.5\\0\\-1.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\0\\-3\end{bmatrix}$$

$$Y^TJY=\left[\sum y,\sum y,\sum y,\sum y\right]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=10\sum y=10\times 10=100$$

$$SSR=\hat{\beta}^TX^TY-\frac{Y^TJY}{n}=[2.5\quad 0\quad -1.5]\begin{bmatrix}10\\0\\-3\end{bmatrix}-\frac{100}{4}=4.5$$

$$SSTO=SSR+SSE=4.5+0.5=5$$

$$\therefore R^2=\frac{SSR}{SSTO}=\frac{4.5}{5}=0.9\ (\text{或}90\%)$$

(三)$MSE=\frac{SSE}{n-3}=\frac{0.5}{4-3}=0.5$

①$\begin{cases}H_0:\beta_2+1\geq 0\\H_1:\beta_2+1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}H_0:\beta_2\geq -1\\H_1:\beta_2<-1\end{cases}$

②$C=\{T|T<-t_{0.05}(4-3)=-6.314\}$

③$T=\frac{\hat{\beta}_2-d}{S_{\hat{\beta}_2}}=\frac{-1.5-(-1)}{\sqrt{\frac{0.5}{2}}}=-1\notin C$

$\therefore$ Do not reject H_0 ，無充分證據顯示 $\beta_2+1<0$

(四)

Full model： $b_F=\hat{\beta}=\begin{bmatrix}2.5\\0\\-1.5\end{bmatrix}$

$$Cb_F-h=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.5\\10\\-1.5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5\\0\\-1.5\end{bmatrix}$$

$$C(X^TX)^{-1}C^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$(Cb_F-h)^T[C(X^TX)^{-1}C^T]^{-1}(Cb_F-h)$$

$$=[2.5\quad 0\quad -1.5]\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.5\\0\\-1.5\end{bmatrix}=29.5$$

$$Y^YY=SSTO+\frac{Y^TJY}{n}=5+\frac{100}{4}=30$$

$$b_F^TX^YY=[2.5\quad 0\quad -1.5]\begin{bmatrix}10\\0\\-3\end{bmatrix}=29.5$$

①$\begin{cases}H_0:\beta_0=\beta_1=\beta_2=0\\H_1:\beta_0\neq 1\text{或}\beta_1\neq 1\text{ 或 }\beta_2\neq 1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ H_1: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: [C]_{s\times k} \cdot [\beta]_{k\times 1} = [h]_{s\times 1} \\ H_1: [C]_{s\times k} \cdot [\beta]_{k\times 1} \neq [h]_{s\times 1} \end{cases}$$

② $C = \{F | F > F_{0.05}(3, 4-3) = 216\}$

③ $$F = \frac{[SSE(R) - SSE(F)]/s}{SSE(F)/(n-k)} = \frac{(Cb_F - h)^T [C(X^TX)^{-1}C^T]^{-1}(Cb_F - h)/s}{(Y^TY - b_F^T X^T Y)/(n-k)}$$

$$= \frac{29.5/3}{(30-29.5)/(4-3)} = 0.6667 \notin C$$

∴ Do not reject H_0，無充分證據顯示

$\beta_0 \neq 1$ 或$\beta_1 \neq 1$ 或 $\beta_2 \neq 1\beta_1 \neq 1$ 或 $\beta_2 \neq 1$

(五)β_1之95%C.I.

$$= \beta_1 \pm t_{\frac{0.05}{2}}(4-3) \cdot S_{\hat{\beta}_1} = 0 \pm 12.706 \cdot \sqrt{\frac{0.5}{4}} = (-4.49, 4.49)$$

四、考慮以下多重線性迴歸模式

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i，\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)，i = 1, \ldots, n。$$

令

$$Y = [Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_n]^t，X_j = [X_{1j} \quad X_{2j} \quad \cdots \quad X_{nj}]^t，j = 1, \cdots, p。$$

假設X_{ij}，$i = 1, \ldots, n$，不全為0且$X_j^t X_k = 0$，$j \neq k$。

(一)試以Y及X_j來表示$\beta_1, \ldots, \beta_p$之最小平方估計量以及殘差平方和（residual sum of squares）。（12分）

(二)考慮另一線性迴歸模式$Y_i = \alpha_1 X_{i1} + \alpha_2 X_{i2} + \cdots + \alpha_p X_{ip} + \zeta_i$，$i = 1, \ldots, n$，$\zeta_i \sim N(0, a^2\sigma^2)$為彼此獨立之隨機誤差且a為正常數。試求以Y及$X_j$來表示$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$之加權最小平方估計量（weighted least squares estimator），且找出此加權最小平方估計量與在(一)之$\beta_1, \ldots, \beta_p$最小平方估計量之關係式。（8分）

答：

(一)

(1)$X = [X_1 X_2 \cdots X_P]$

$$X^TX = \begin{bmatrix} X_1^t \\ X_2^t \\ \vdots \\ X_p^t \end{bmatrix} [X_1 X_2 \cdots X_P] = \begin{bmatrix} X_1^t \cdot X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2^t \cdot X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & X_p^t \cdot X_p \end{bmatrix}_{p\times p}$$

$$X^TY=\begin{bmatrix}X_1^t\\X_2^t\\\vdots\\X_p^t\end{bmatrix}\cdot Y=\begin{bmatrix}X_1^tY\\X_2^tY\\\vdots\\X_p^tY\end{bmatrix}_{p\times1}\quad,\quad \text{where } Y=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^TY$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{X_1^t\cdot X_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{X_2^t\cdot X_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{X_p^t\cdot X_p}\end{bmatrix}_{p\times p}\begin{bmatrix}X_1^tY\\X_2^tY\\\vdots\\X_p^tY\end{bmatrix}_{p\times1}=\begin{bmatrix}\frac{X_1^tY}{X_1^t\cdot X_1}\\\frac{X_2^tY}{X_2^t\cdot X_2}\\\vdots\\\frac{X_p^tY}{X_p^t\cdot X_p}\end{bmatrix}_{p\times1}$$

(2)$SSE=Y^TY-\hat{\beta}^TX^TY$

$$=Y^TY-\begin{bmatrix}\frac{X_1^tY}{X_1^t\cdot X_1} & \frac{X_2^tY}{X_2^t\cdot X_2} & \cdots & \frac{X_p^tY}{X_p^t\cdot X_p}\end{bmatrix}_{1\times p}\begin{bmatrix}X_1^tY\\X_2^tY\\\vdots\\X_p^tY\end{bmatrix}_{p\times1}$$

$$=Y^TY-\sum_{j=1}^{p}\frac{(X_j^tY)^2}{X_j^t\cdot X_j}\quad \text{where } X_j^tY：\text{scalar}$$

(二)加權$OLSE=(X^TWX)^{-1}(X^TWY)$

$$=\left(\begin{bmatrix}X_1^t\\X_2^t\\\vdots\\X_p^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{a^2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a^2}\end{bmatrix}[X_1X_2\cdots X_P]\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}X_1^t\\X_2^t\\\vdots\\X_p^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{a^2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{bmatrix}X_1^t\\X_2^t\\\vdots\\X_p^t\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_n\cdot[X_1X_2\cdots X_P]\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}X_1^t\\X_2^t\\\vdots\\X_p^t\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_n\cdot\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix}\right)$$

$$=a^2\begin{bmatrix}\frac{1}{X_1^t\cdot X_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{X_2^t\cdot X_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{X_p^t\cdot X_p}\end{bmatrix}_{p\times p}\cdot\frac{1}{a^2}\begin{bmatrix}X_1^tY\\X_2^tY\\\vdots\\X_p^tY\end{bmatrix}_{p\times1}=\begin{bmatrix}\frac{X_1^tY}{X_1^t\cdot X_1}\\\frac{X_2^tY}{X_2^t\cdot X_2}\\\vdots\\\frac{X_p^tY}{X_p^t\cdot X_p}\end{bmatrix}$$

$$=\hat{\beta}\ (OLSE)$$