

《抽樣方法》

一、欲估計國內主要回收業者（共30家回收業者）之總員工人數，從30家回收業者隨機抽出6家回收業者進行訪查，得到2011年及2012年的員工人數資料如表1。

表1 樣本回收業者2011年及2012年員工人數 單位：人

回收業者	2011年(X)	2012年(Y)
1	4	6
2	10	8
3	16	13
4	18	16
5	16	10
6	8	7
平均員工人數	12	10

$$s_x^2 = 30.4, \quad s_y^2 = 14.8, \quad s_{xy} = 19.2$$

根據2011年30家回收業者全查結果得到總員工人數為540人（即 $\sum_{i=1}^{30} x = 540$ ）。

(一)請利用比率估計法 (Ratio Estimation)、簡單均數估計法 (Mean per unit, 或 Simple mean per element)、迴歸估計法 (Regression Estimation) 估計2012年國內主要回收業者 (30家回收業者) 之總員工人數並求算標準誤。(30分)

(二)根據(一)之結果，你認為那個估計式比較好？說明為什麼？(5分)

試題評析	本試卷考題具鑑別度，只要把握好計算時間，程度好的考生可拿80~90分左右，一般考生則落在65~75之間。本題為比率估計、迴歸估計與簡單隨機抽樣之綜合考題，在歷屆考題中皆曾出現過，要拿到分數並不困難。
考點命中	《高點·高上2012抽樣方法總複習講義第二回》，馮國經編撰，頁20，考題6。 《高點·高上抽樣方法講義第三回》，馮國經編撰，頁114，考題6。

答：

(一)

(1)比率估計法

$$r = \frac{\sum y}{\sum x} = \frac{60}{72} = 0.83 \cong 0.8$$

$$s_d^2 = s_y^2 - 2r \cdot s_{xy} + r^2 s_x^2$$

$$= 14.8 - 2 \cdot 0.8 \cdot 19.2 + 0.8^2 \cdot 30.4$$

$$= 14.8 - 30.72 + 19.456$$

$$= 3.536$$

$$\text{var}(\hat{Y}_r) = X^2 \cdot \text{var}(r) = X^2 \cdot \frac{(1-f)}{n} \cdot s_d^2$$

【中壢】中壢市中山路 100 號 14 樓 X-4256699 【台中】台中市東區復興路四段 231-3 號 1 樓·04-22298699
【台南】台南市中西區中山路 147 號 3 樓之 1·06-2235868 【高雄】高雄市新興區中山一路 308 號 8 樓·07-2358996
【另有板橋·淡水·三峽·林口·羅東·逢甲·東海·中技·彰化·嘉義】

$$\begin{aligned}
&= N^2 \cdot (1-f) \cdot \frac{s_d^2}{n} \\
&= 30^2 \cdot \left(1 - \frac{6}{30}\right) \cdot \frac{3.536}{6} \\
&= 424.32 \\
s_{\hat{Y}_r} &= 20.59 \cong 20.6 \\
\hat{Y}_r &= r \cdot X \quad \hat{Y}_r = 0.8 \cdot 540 = 432
\end{aligned}$$

(2) 簡單均數法

$$\begin{aligned}
\hat{Y} &= N \cdot \bar{y} \\
s^2 &= \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \left[\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \right] \\
&= \frac{1}{6-1} \left[674 - \frac{60^2}{6} \right] \\
&= 14.8 \\
\text{var}(\hat{Y}) &= N^2 \cdot \text{var}(\bar{y}) = N^2 \cdot (1-f) \cdot \frac{s^2}{n} \\
&= 30^2 \cdot \left(1 - \frac{6}{30}\right) \cdot \frac{14.8}{6} \\
&= 1776 \\
s_{\hat{Y}} &= 42.14 \cong 42.1 \\
\hat{Y} &= N \cdot \bar{y} = 30 \cdot 10 = 300
\end{aligned}$$

(3) 迴歸估計法

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (x - \bar{x})^2} = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{816 - \frac{72 \cdot 60}{6}}{1016 - \frac{(72)^2}{6}} = \frac{96}{152} = 0.63 \cong 0.6 \\
s_{lr}^2 &= \frac{\sum [(y_i - \bar{y}) - b(x_i - \bar{x})]^2}{n-1} \\
&= s_y^2 - 2b \cdot s_{xy} + b^2 s_x^2 \\
&= 14.8 - 2 \cdot 0.6 \cdot 19.2 + 0.6^2 \cdot 30.4 \\
&= 14.8 - 23.04 + 10.944 \\
&= 2.704
\end{aligned}$$

$$\text{var} \hat{Y}_{lr} = N^2 \cdot (1-f) \cdot \frac{s_{lr}^2}{n}$$

高點·高上高專特考 goldensun.get.com.tw 台北市開封街一段2號8樓 02-23318268
【台中】台中市東區復興路四段231-3號1樓·04-22298699
【台南】台南市中西區中山路147號3樓之1·06-2235868 【高雄】高雄市新興區中山一路308號8樓·07-2358996
【另有板橋·淡水·三峽·林口·羅東·逢甲·東海·中技·彰化·嘉義】

$$= 30^2 \cdot \left(1 - \frac{6}{30}\right) \cdot \frac{2.704}{6}$$

$$= 324.48$$

$$s_{\hat{Y}_{lr}} = 18.01 \cong 18$$

$$\hat{Y}_{lr} = N \cdot \bar{y}_{lr} = 30 \left[\bar{y} + b_1 (\bar{X} - \bar{x}) \right]$$

$$= 30 [10 + 0.6(18 - 12)]$$

$$= 408$$

(二)迴歸估計式相對較優，因為此方法的標準誤估計量相對較小。

二、某大學欲了解其學生需要助學貸款的比例，該校共有24個科系。為了節省成本，校方打算採用兩段群集抽樣法 (two-stage cluster sampling) 抽出4個科系，每個被抽出的科系抽出10%的學生，調查結果需要助學貸款的學生人數如表2：(25分)

表2 抽樣調查結果需要助學貸款的學生人數 單位：人

科系 i	該科系 總學生人數 M_i	抽出的 學生人數 m_i	需要助學貸款的 學生人數 a_i
1	500	50	5
2	600	60	20
3	1000	100	50
4	900	90	30
Total	3000		

試估計該大學學生需要助學貸款的比例，並求算該估計值之標準誤。

試題評析	此題為兩階段群集抽樣法， M 為未知，在歷屆考題中亦曾出現過，要拿到分數並不困難。
考點命中	《高點·高上2012抽樣方法總複習講義第三回》，馮國經編撰，頁20，考題11。 《高點·高上抽樣方法講義第三回》，馮國經編撰，頁40，考題4。

答：

(1) (1)此題採兩階段群集抽樣法，一般 M 為已知，但在此題中 M 未知，因此以 \hat{M} 估計 M ；如此題未指定方法時，最適合採取比率兩階段群集抽樣法計算之。 $\hat{M} = \frac{(500 + 600 + 1000 + 900)}{4} = 750$ ，

$$\hat{M} = 24 \times \hat{M} = 24 \times 750 = 18000$$

$$\bar{p} = \frac{N}{\hat{M} \cdot n} \sum M_i \cdot p_i = \frac{24}{18000 \times 4} \left(500 \cdot \frac{5}{50} + 600 \cdot \frac{20}{60} + 1000 \cdot \frac{50}{1000} + 900 \cdot \frac{30}{90} \right) = 0.35$$

$$(2) s_{ib}^2 = \frac{1}{n-1} \sum \left(\hat{A}_i - \bar{\hat{A}} \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\sum \hat{A}_i^2 - \frac{\left(\sum \hat{A}_i \right)^2}{4} \right) = 35625$$

高點·高上高普特考 · goldensun.get.com.tw 台北市開封街一段2號8樓 02-23318268
【中壢】中壢市中山路100號14樓 03-4256899 【台中】台中市東區復興路四段231-3號1樓 04-22298699
【台南】台南市中西區中山路147號3樓之1 06-2235868 【高雄】高雄市新興區中山一路308號8樓 07-2358996
【另有板橋·淡水·三峽·林口·羅東·逢甲·東海·中技·彰化·嘉義】

$$A = \frac{N^2}{\hat{M}^2} (1 - f_1) \frac{s_{1b}^2}{n} = \frac{24^2}{18000^2} \left(1 - \frac{4}{24}\right) \frac{35625}{4} = 0.0132$$

(3)

$$B = \frac{N^2}{n \cdot \hat{M}^2} \sum_{i=1}^4 M_i^2 \left(1 - \frac{m_i}{M_i}\right) \frac{p_i q_i}{m_i - 1} = \frac{24}{4 \times 18000^2} (413.2653 + \dots + 1820.2247) = 0.000106$$

$$(4) \text{var}(\hat{p}) = A + B = 0.0132 + 0.000106 = 0.013306, \quad s_{\hat{p}} = 0.1154$$

三、某大學欲了解其大學畢業生的起薪，採用分層隨機抽樣法，依學院別分成三層。各學院畢業生人數 N_i 及根據過去調查所求得這三學院的畢業生起薪之標準差 S_i （以月計）分別列於表3。（20分）

表3 某大學畢業生母體概況

層別（學院）	商學院	文學院	法學院
起薪標準差（萬元）	$S_1=5$	$S_2=6$	$S_3=3$
畢業生人數（人）	$N_1=1000$	$N_2=400$	$N_3=600$

若總共要抽出200個畢業生為樣本（ $n=200$ ）

（一）採用尼曼配置法（Neyman allocation）各層應配置多大的樣本？

（二）採用比例配置法（Proportional allocation）各層應配置多大的樣本？

試題評析	此題為分層隨機抽樣考題，採用比例與紐門配置計算各層樣本，只要把握好計算時間，要拿到分數並不困難。
考點命中	《高點·高上2012抽樣方法講義第二回》，馮國經編撰，頁91，考題17。 《高點·高上2012抽樣方法講義第二回》，馮國經編撰，頁86，考題15。

答：

（一）

$$\sum_{h=1}^L N_h \cdot S_h = 1000 \cdot 5 + 400 \cdot 6 + 600 \cdot 3 = 9200$$

$$n_{\text{商}} = \frac{N_1 \cdot S_1}{\sum_{h=1}^3 N_h \cdot S_h} \cdot n = \frac{5000}{9200} \cdot 200 = 108.6 \cong 109$$

$$n_{\text{文}} = \frac{N_2 \cdot S_2}{\sum_{h=1}^3 N_h \cdot S_h} \cdot n = \frac{2400}{9200} \cdot 200 = 52.1 \cong 52$$

$$n_{\text{法}} = \frac{N_3 \cdot S_3}{\sum_{h=1}^3 N_h \cdot S_h} \cdot n = \frac{1800}{9200} \cdot 200 = 39.1 \cong 39$$

【版權所有，重製必究！】

(二)

$$n_{\text{商}} = \frac{N_1}{\sum_{h=1}^3 N_h} \cdot n = \frac{1000}{2000} \cdot 200 = 100$$

$$n_{\text{文}} = \frac{N_2}{\sum_{h=1}^3 N_h} \cdot n = \frac{400}{2000} \cdot 200 = 40$$

$$n_{\text{法}} = \frac{N_3}{\sum_{h=1}^3 N_h} \cdot n = \frac{600}{2000} \cdot 200 = 60$$

四、接續前一題，若自每學院各隨機抽取50個畢業生，調查其起薪（以月計），調查結果得到各學院畢業生起薪之均數及標準差，列於表4。（20分）

表4 各學院畢業生起薪之均數及標準差

層別(學院) i	N_i	n_i	起薪均數 (萬元) \bar{x}_i	起薪標準差 (萬元) s_i
商學院	1000	50	4	6
文學院	400	50	2	7
法學院	600	50	5	3

試估計該大學畢業生的平均起薪，並求算該估計值之標準誤。

試題評析 此題為分層隨機抽樣考題，於歷屆考題中亦曾出現過，要拿到分數並不困難。

考點命中 《高點·高上2012抽樣方法講義第二回》，馮國經編撰，頁66，考題1。
《高點·高上2012抽樣方法講義第二回》，馮國經編撰，頁69，考題4。

答：

(一)

$$\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^3 W_h \cdot \bar{y}_h = \frac{1000}{2000} \cdot 4 + \frac{400}{2000} \cdot 2 + \frac{600}{2000} \cdot 5 = 3.9$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{y}_{st}) &= \sum_{h=1}^3 W_h^2 \text{var}(\bar{y}_h) = \sum_{h=1}^3 \frac{N_h^2}{N^2} \cdot (1 - f_h) \cdot \frac{s_h^2}{n_h} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^3 N_h^2 \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{s_h^2}{n_h} \\ &= \frac{1}{2000^2} \left[1000^2 \left(1 - \frac{50}{1000}\right) \cdot \frac{6^2}{50} + 400^2 \left(1 - \frac{50}{400}\right) \cdot \frac{7^2}{50} + 600^2 \left(1 - \frac{50}{600}\right) \cdot \frac{3^2}{50} \right] \\ &= \frac{1}{2000^2} [684000 + 137200 + 59400] = 0.22 \end{aligned}$$

$$s_{\bar{y}_{st}} = 0.469$$

高點·高上高普特考 goldensun.get.com.tw 台北市開封街一段2號8樓 02-23318268

【中壢】中壢市中山路100號14樓·03-4256899

【台中】台中市東區復興路四段231-3號1樓·04-22298699

【台南】台南市中西區中山路147號3樓之1·06-2235868

【高雄】高雄市新興區中山一路308號8樓·07-2358996

【另有板橋·淡水·三峽·林口·羅東·逢甲·東海·中技·彰化·嘉義】