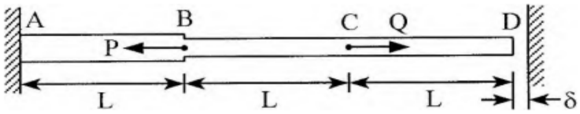
《材料力學》

一、有一 ABCD 水平桿件如下圖所示，AB 段橫斷面面積 $A_1 = 10\times10^{-4}\ m^2$，BCD 段橫斷面面積 $A_2 = 8\times10^{-4}\ m^2$。ABCD 桿件之 A 點為固定端，D 點與牆面有一間隙 $\delta = 2\times10^{-4}$ m 存在。設 L = 2 m，桿件之彈性係數 E = 200 GPa。當 B 點受一集中力 P = 5 kN，且 C 點受一集中力 Q = 20 kN 時，D 點是否會碰觸到牆？試求 P 及 Q 作用下，此桿件在 A 點與 D 點所受之水平力，並註明反力之方向。(25 分)

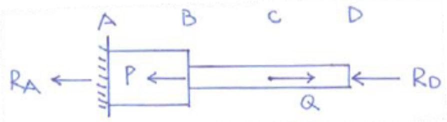


試題評析	一度靜不定軸力桿件分析，本題的考點主要是能否說明D點是否能與牆碰到，其餘計算都非常的容易！
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.4.3。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.4.3。

答：

一、確認 D 點是否會碰觸到牆並計算 D 點水平反力

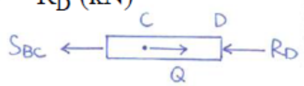
若 ABCD 桿件伸長致使 D 點與右側固定端接觸，此時右側固定端反力會是向「左」(可想像成 ABCD 桿件因溫升而在固定端有一對向內擠壓之力，但此情況目前僅限用於右側固定端)；反之若計算出來右側固定端反力朝「右」則表示 D 點還不會與其碰觸。先假設 D 點與右側固定端會碰觸且其反力設向「左」，即是$R_D(\leftarrow)$。



1.先設贅力並計算支承反力及各桿軸力

此為一度靜不定軸力桿件，已取 D 點反力$R_D(\leftarrow)$為贅力，接著計算各桿段內力值：

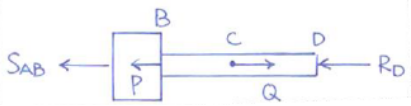
桿件 AB 段軸力 $S_{AB} = -P+Q-R_D = -5+20-R_D = 15-R_D$ (kN)



桿件 BC 段軸力 $S_{BC} = Q-R_D = 20-R_D$ (kN)

桿件 CD 段軸力 $S_{CD} = -R_D$ (kN)

2.計算各桿件伸縮量



$$\text{AB 段伸縮量}\ \delta_{AB} = \frac{S_{AB}L}{EA_1} = \frac{(15-R_D)\times10^3\times(2\times10^3)}{(200\times10^3)(10\times10^{-4}\times10^6)} = 0.15-0.01R_D\ \text{mm}$$

BC 段伸縮量 $\delta_{BC} = \dfrac{S_{BC}L}{EA_2} = \dfrac{(20-R_D)\times10^3\times(2\times10^3)}{(200\times10^3)(8\times10^{-4}\times10^6)} = 0.25-0.0125R_D$ mm

CD 段伸縮量 $\delta_{CD} = \dfrac{S_{CD}L}{EA_2} = \dfrac{(-R_D\times10^3)(2\times10^3)}{(200\times10^3)(8\times10^{-4}\times10^6)} = -0.0125R_D$ mm

3.列出變形諧和條件解出贅力

依據題意可知 ABCD 桿件總伸縮量為初始間隙δ，即是 $\delta_{AB}+\delta_{BC}+\delta_{CD}=\delta$：

$\Rightarrow 0.4-0.035R_D = 2\times10^{-4}\times10^3 \Rightarrow R_D = 5.714\ \text{kN}(\leftarrow)$

由以上結果可知，在外力 P 及 Q 作用下 D 點已與右側固定端(右側牆面)碰觸，

且 D 點水平反力為 $\underline{R_D = 5.714\ \text{kN}(\leftarrow)}$。

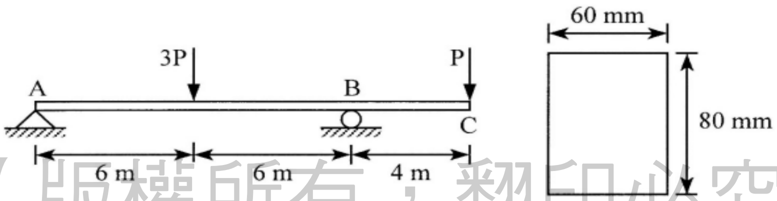
二、計算 A 點水平反力

由水平方向力平衡可得 A 點水平反力：

$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A+P-Q+R_D = 0 \Rightarrow R_A = -P+Q-R_D = -5+20-5.714$

$\Rightarrow \underline{R_A = 9.286\ \text{kN}(\leftarrow)}$

二、有一矩形梁受兩個集中載重如下圖所示，A 點為鉸支承，B 點為滾支承，C 點為自由端。如此梁之最大容許彎曲應力為10 MPa，且最大容許剪應力為0.5 MPa，試求 P 之最大值為何？（25 分）



試題評析	非常簡單的給容許應力反求載重值考題，考場上不要粗心一定可以得分，而且每年上課都會講到很類似的例題喔！
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題4.2.9。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題4.2.3。

答：

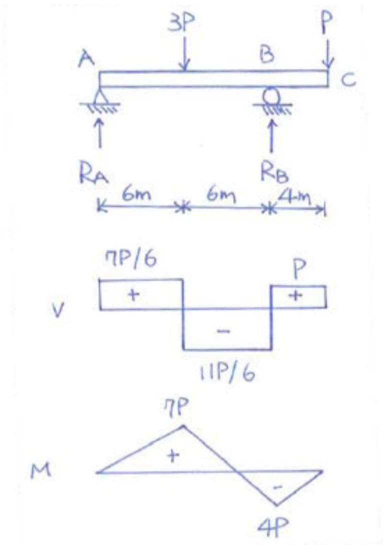
1.計算支承力並繪出剪力彎矩圖

對 A 點取力矩平衡可求 B 點反力 R_B；再由垂直向力平衡算出 A 點反力 R_A：

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \text{B 點反力 } R_B = \frac{(3P)(6)+(P)(16)}{12} = \frac{17P}{6}\ (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \text{A 點反力 } R_A = 3P+P-R_B = \frac{7P}{6}\ (\uparrow)$$

將梁剪力圖及彎矩圖繪出如下所示，由圖可知梁內最大彎矩 $M_{max} = 7P$、梁內最大剪力 $V_{max} = 11P/6$。(力量用N、長度用m)



2.計算外力 P 最大值

由**(最大撓曲正向應力 σ_{max})≤(容許彎曲應力 σ_{allow})**求出對應之最大外力 P_1：

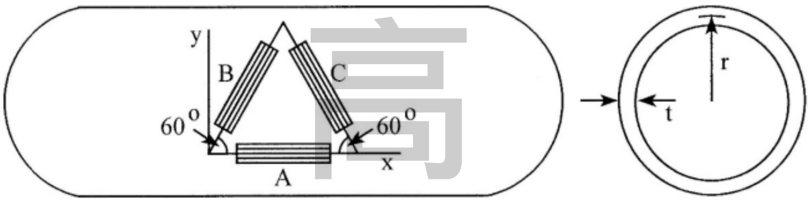
$$\Rightarrow \sigma_{max} \le \sigma_{allow} \Rightarrow \frac{M_{max}}{S} \le \sigma_{allow} \Rightarrow \frac{(7P_1)}{\left(\frac{0.06\times0.08^2}{6}\right)} \le 10\times10^6 \Rightarrow P_1 \le 91.429\text{ N}$$

再由**(最大撓曲剪應力 τ_{max})≤(容許剪應力 τ_{allow})**求出對應之最大外力 P_2：

$$\Rightarrow \tau_{max} \le \tau_{allow} \Rightarrow \frac{3V_{max}}{2A} \le \tau_{allow} \Rightarrow \frac{(3)(11P_2/6)}{(2)(0.06\times0.08)} \le 0.5\times10^6 \Rightarrow P_2 \le 872.727\text{ N}$$

因此梁若要滿足以上兩種容許應力之限制，需選擇算出後**較小值**作為最大外力 $P_{max} = \min(P_1,P_2) = \min(91.429\ ,\ 872.727) = \underline{91.429\text{ N}}$。

三、有一60°應變計組合，安裝在圓柱形壓縮空氣儲槽表面如下圖所示。應變計A的紀錄為$\varepsilon_a=100\times10^{-6}$，應變計B與C的紀錄相等，且$\varepsilon_b=\varepsilon_c=280\times10^{-6}$。如果儲槽的半徑 r 與厚度 t 之比值$r/t=20$，且儲槽內部空氣壓力為$p=4$ MPa，計算儲槽材料的彈性係數E和柏松比ν。(25分)



提示：$\varepsilon_{x'}=\dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos2\theta+\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin2\theta$

試題評析	給三片應變計要反求彈性係數和柏松比考題，出現這兩個關鍵參數就會用到廣義虎克定理，上課講了不下百遍了，課堂上也有非常相近的例題喔！
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題6.3.2。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題7.1.1。

答：

1.由平面應變轉換公式先解出正向應變ε_y

依據題意可令$\varepsilon_x=\varepsilon_a=100\times10^{-6}$、$\gamma_{xy}=0$。由平面應變轉換公式反求正向應變$\varepsilon_y$值：

$$\varepsilon_b=\varepsilon_{60^\circ}=(100)(\cos60^\circ)^2+(\varepsilon_y)(\sin60^\circ)^2=280\times10^{-6}\Rightarrow\varepsilon_y=340\times10^{-6}$$

2.判別薄壁壓力容器形式

本題為**圓筒形兩端封閉薄壁**壓力容器，要分別計算**縱向**應力值與**環向**應力：

縱向應力$\sigma_x=\dfrac{Pr}{2t}=(\dfrac{4}{2})(20)=40\text{ MPa}$

環向應力$\sigma_y=\dfrac{Pr}{t}=80\text{ MPa}$

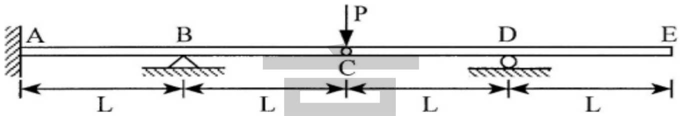
3.由廣義虎克定理公式反求彈性係數E和柏松比ν

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\nu\frac{\sigma_y}{E}\Rightarrow100\times10^{-6}=\frac{1}{E}(40-80\nu)\ldots(1)$$

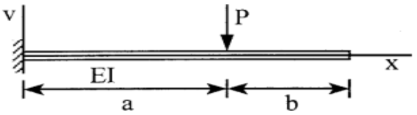
$$\varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E}-\nu\frac{\sigma_x}{E}\Rightarrow340\times10^{-6}=\frac{1}{E}(80-40\nu)\ldots(2)$$

將(1)及(2)兩式聯立可得彈性係數$\underline{E=206.897\times10^3\text{ MPa}=206.897\text{ GPa}}$、波松比$\nu=\underline{0.241}$。

四、有一連續梁 ABCDE 如下圖所示，A 點為固定端，B 點為鉸支承，C 點為鉸接，D 點為滾支承。此梁於 C 點受到一集中載重 P，如梁斷面彎矩勁度為 EI，求 A、B 及 D 點之反力（可包括彎矩）。並計算 C 點之位移、D 點之轉角及 E 點之位移。請註明反力、位移及轉角之方向。（25 分）



提示：a + b = L

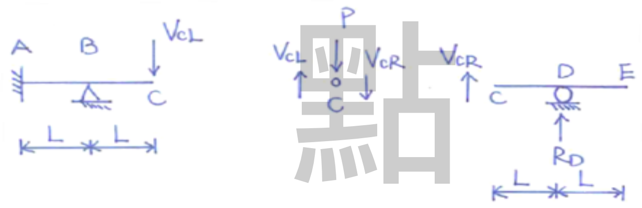


$$v(x) = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x), \quad 0 \le x \le a,$$

$$v(x) = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a), \quad a \le x \le L.$$

試題評析	一度靜不梁要求位移跟轉角與反力值，題目有給撓度公式算是很佛心！CDE段不會彎曲所以會有剛體運動般的斜直線變形，用靜平衡就可以得到此結果了！
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.3.20。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.3.25。

答：



先取出桿件 CDE 段，此時分別對 C 點取力矩平衡可求 D 點反力 R_D，再由垂直方向力平衡算出 C 點右側剪力 V_{CR}：

$\sum M_C = 0 \Longrightarrow$ D 點反力 $\underline{R_D = 0}$

$\sum F_y = 0 \Longrightarrow$ C 點右側剪力 $V_{CR} = 0$

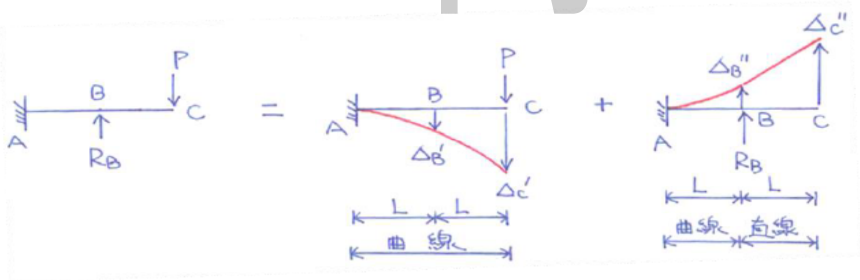
接著單獨取出鉸接 C 點可得 C 點左側剪力 $V_{CL} = P$。目光轉移到桿件 ABC 段，可知其為一度靜不定梁桿件，將 ABC 段拆解成由 P 力及 B 點反力 R_B 各自作用之桿件，並依據題目所給撓度公式進行計算。題目中所給 a 表示「力量到固定端之長度」、x 則代表「欲求點之長度」，另外需特別提醒的是題目撓度公式所給之 P

以「向下為正」而「向上為負」，這些是代入公式時應注意事項。圖(b)中求 B 點位移$\Delta_{B'}$時，令 $a=2L$、$x=L$、$P=P$：

$$\Delta_{B'}=v(x)=-\frac{Px^2}{6EI}(3a-x)=-\frac{(P)(L)^2}{6EI}(3\times 2L-L)=-\frac{5PL^3}{6EI}\ (\downarrow)$$

圖(b)中求 C 點位移$\Delta_{C'}$時，令 $a=2L$、$x=2L$、$P=P$：

$$\Delta_{C'}=v(x)=-\frac{Px^2}{6EI}(3a-x)=-\frac{(P)(2L)^2}{6EI}(3\times 2L-2L)=-\frac{8PL^3}{3EI}\ (\downarrow)$$



圖(a)　　圖(b)　　圖(c)

圖(c)中求 B 點位移$\Delta_{B''}$時，令 $a=L$、$x=L$、$P=-R_B$：

$$\Delta_{B''}=v(x)=-\frac{Px^2}{6EI}(3a-x)=-\frac{(-R_B)(L)^2}{6EI}(3\times L-L)=\frac{R_BL^3}{3EI}\ (\uparrow)$$

圖(c)中求 C 點位移$\Delta_{C''}$時，令 $a=L$、$x=2L$、$P=-R_B$：

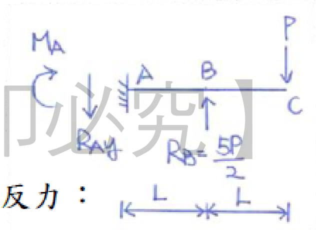
$$\Delta_{C''}=v(x)=-\frac{Pa^2}{6EI}(3x-a)=-\frac{(-R_B)(L)^2}{6EI}(3\times 2L-L)=\frac{5R_BL^3}{6EI}\ (\uparrow)$$

因為 B 點實為鉸支承故其撓度(位移)為零，可由此條件解出 B 點反力R_B：

$$\Delta_B=\Delta_{B'}+\Delta_{B''}=-\frac{5PL^3}{6EI}+\frac{R_BL^3}{3EI}=0\Rightarrow \text{B 點反力 } R_B=\frac{5P}{2}\ (\uparrow)$$

C 點位移即是$\Delta_{C'}$與$\Delta_{C''}$之加總：

$$\Delta_C=\Delta_{C'}+\Delta_{C''}=-\frac{8PL^3}{3EI}+\left(\frac{5L^3}{6EI}\right)\left(\frac{5P}{2}\right)=-\frac{7PL^3}{12EI}\ (\downarrow)$$



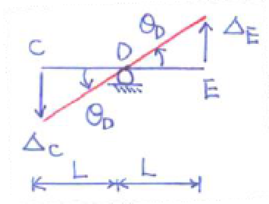
B 點反力已經算出，單獨取出桿件 ABC 段即可求出 A 點反力：

$$\sum F_y=0\Rightarrow \text{A 點垂直反力 } R_{Ay}=R_B-P=\frac{3P}{2}\ (\downarrow)$$

$$\sum M_A=0\Rightarrow \text{A 點反力矩 } M_A=(R_B)(L)-(P)(2L)=\frac{PL}{2}\ (\circlearrowright)$$

最後取出桿件 CDE 段，由前面分析已知 CDE 段無彎矩作用故其不會產生彎曲，僅會保持直線或斜直線變形，又 C 點已經算出其撓度向下、D 點為滾支承不會

位移，因此 CDE 段可看作是一個翹翹板的變形，由幾何關係可得 E 點位移Δ_E與 D 點轉角θ_D：



$$\Delta_E = \Delta_C = \underline{\frac{7PL^3}{12EI}\ (\uparrow)}$$

$$\theta_D = \frac{\Delta_C}{L} = \underline{\frac{7PL^2}{12EI}\ (\circlearrowleft)}$$