

高點

## 高普考商科分眾課

為好名次而來

打造高分力



海量解題力

提升寫作力

① 一堆例題見解，怎麼寫才高分？

申論寫作正解班 ▶ 論正技巧 **立即上課**

緊扣命題趨勢，個人化批改指導，厚植寫作力！

高分實證

李○儀 **應屆考取** 112高考財稅行政【探花】

推薦大家報名申論寫作正解班，對於民法申論題搶分非常有幫助，老師會帶大家作一些經典範例，詳細地講解並分享許多作答技巧，每週還會提供題目讓大家帶回去練習。

※ 面授/網院 3,000 元起/科；雲端 6折 起/科

① 寫不完或寫太少，時間難拿捏？

經典題庫班 ▶ 弱科強化 **立即上課**

專業師資嚴選經典考古題，精析關鍵考點！

高分實證

薛○勻 **在職考取** 112高考經建行政、普考經建行政

建議務必參加經典題庫班，網院課程都獨自念書，會有盲點而不自知，藉由題庫練習可以更有信心和確認作答方式，最後一個月考古題總複習才不會慌亂。

※ 面授/網院 2,500 元起/科；雲端 6折 起/科

① 公經題型不固定，該如何準備？

## 公經進階班 ▶ 掌握關鍵

專業師資精選重要模型和圖形，題點計算題要領！

高分實證

謝○卓 **在職考取** 112高考經建行政

跟老師討論過後，我接受老師的建議，加選高點的公經進階班，它比較偏向數理模型的推導及解說，對於經建類組的同學而言，可以建立重要模型的觀念，在回答申論題時幫助也很大。

※ 面授/網院 65折 起/科；雲端 85折 起/科

① 寫得頭頭是道，但切中核心嗎？

狂作題班 ▶ 速效提分 **114.3陸續開課**

名師親領搭配助教輔導，仿真模測有效提分！

高分實證

黃○瑜 **連續考取** 112高考會計、普考會計、111記帳士

中會狂作題班每次小考完都會檢討，助教會整理一些比較容易犯錯的地方及一些陷阱題供大家注意，讓我覺得狂作題班是很值得報名的！

※ 面授課程 5,000 元起/科

## 衝刺113地方特考，試不宜遲！

- 113/7/31前憑113高普考准考證報名高點分眾課，最高可享45折起優惠價！
- 最新優惠詳洽各分班櫃檯或高點高上國考生活圈



另有**行動版課程**隨時可上  
試聽&購課，請至

1 知識達購課館  
ec.ibrain.com.tw



2 高點網路書店  
publish.get.com.tw



# 《統計學概要》

一、目前核融合技術的重大突破，讓未來核融合發電可望成真。已知國內某大學的實驗室有三座核融合反應爐，令變數 $T_i$ 為第 $i$ 座反應爐的核融合實際反應時間與目標反應時間之間的差異， $i=1,2,3$ 。假設變數 $T_1, T_2, T_3$ 彼此相互獨立，且都服從平均數為0，變異數為4之常態分配。

(一) 求出機率 $P[T_1^2 + T_2^2 \leq 2]$ 。(10分)

(二) 令變數 $S = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}$ ，請求出變數 $S$ 之機率密度函數 $f(s)$ 。(10分)

(三) 令變數 $W = \frac{T_1^2}{T_1^2 + T_2^2}$ ，請求出變數 $W$ 之機率密度函數 $f(w)$ 。(10分)

(四) 求出題(三)之變數 $W$ 的期望值 $E(W)$ 。(10分)

(五) 求出機率 $P[\text{Min}\{\text{Max}\{T_1, T_2\}, T_3\} < 0]$ ，此處 $\text{Max}\{a, b\}$ 代表取 $a, b$ 之最大值， $\text{Min}\{a, b\}$ 代表取 $a, b$ 之最小值。(10分)

(六) 假設每一座反應爐每次點火成功的機率為0.2，且假設三座反應爐點火成功與否彼此相互獨立。令 $X_i$ 為第 $i$ 座反應爐直到第一次點火成功前，所需的點火（失敗）次數， $i=1,2,3$ 。請求出機率 $P[X_1 \geq X_2]$ 。(10分)

|      |  |
|------|--|
| 試題評析 | 本題著重在機率論之範圍，考生需要對於分配間之關係非常熟悉才比較容易作答，難度算中上程度，考驗考生之數學能力。   |
| 考點命中 | 1. 《高點·高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第七章第二、三節，常態/卡方/指數分配之關係。<br>2. 《高點·高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第七章第四節，伽瑪/貝它分配之關係。<br>3. 《高點·高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第五章第四節，MIN/MAX之分配。 |

答：

$$T_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, 4) \quad \frac{T_i}{\sqrt{4}} = \frac{T_i}{2} \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1) \quad \frac{T_i^2}{4} \stackrel{iid}{\sim} \chi_{(1)}^2 = \text{Gamma}(\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}), \quad i = 1, 2, 3$$

$$(一) \quad \text{令 } Y = \frac{T_1^2}{4} + \frac{T_2^2}{4} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{4} \sim \chi_{(2)}^2 = \text{Gamma}(\alpha = \frac{2}{2} = 1, \lambda = \frac{1}{2}) = \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{2})$$

$$P(T_1^2 + T_2^2 \leq 2) = P(Y \leq \frac{1}{2}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})} = 1 - e^{-\frac{1}{4}}$$

$$(二) \quad \text{令 } H = \frac{T_1^2}{4} + \frac{T_2^2}{4} + \frac{T_3^2}{4} = \frac{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}{4} \sim \chi_{(3)}^2 = \text{Gamma}(\alpha = \frac{3}{2}, \lambda = \frac{1}{2})$$

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2} \leq s) = P(H \leq \frac{s^2}{4}) = \int_0^{\frac{s^2}{4}} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} h^{\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}h} dh$$

$$f_S(s) = \frac{dF_S(s)}{ds} = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \left(\frac{s^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(\frac{s^2}{4})} \times \frac{s}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} s^2 e^{-\frac{s^2}{8}}, \quad 0 < s$$

(三)

|  |
|--|
| 已知 $X_1 \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda) \perp X_2 \sim \text{Gamma}(\beta, \lambda)$<br>$\frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ |
|--|

$$\frac{T_i^2}{4} \stackrel{iid}{\sim} \chi_{(1)}^2 = \text{Gamma}\left(\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right), \quad i = 1, 2, 3$$

$$W = \frac{T_1^2}{T_1^2 + T_2^2} = \frac{\frac{T_1^2}{4}}{\frac{T_1^2}{4} + \frac{T_2^2}{4}} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$f_w(w) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} w^{\frac{1}{2}-1} (1-w)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{w(1-w)}}, \quad 0 < w < 1$$

$$(四) \because W = \frac{T_1^2}{T_1^2 + T_2^2} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore E(W) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$(五) P[\text{Min}\{\text{Max}\{T_1, T_2\}, T_3\} < 0]$$

$$\begin{aligned} &= 1 - P[\text{Min}\{\text{Max}\{T_1, T_2\}, T_3\} \geq 0] \\ &= 1 - P[\text{Max}\{T_1, T_2\} \geq 0] \times P[T_3 \geq 0] \\ &= 1 - \{1 - P[\text{Max}\{T_1, T_2\} < 0]\} \times P[T_3 \geq 0] \\ &= 1 - \{1 - P(T_1 < 0) \times P(T_2 < 0)\} \times P(T_3 \geq 0) \\ &= 1 - P(T_3 \geq 0) + P(T_1 < 0) \times P(T_2 < 0) \times P(T_3 \geq 0) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } P(T_1 < 0) = P(T_2 < 0) = P(Z < 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(T_3 \geq 0) = P(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$$

$$(六) \text{ 令 } Y_i = X_i + 1 \stackrel{iid}{\sim} \text{Geo}(p = 0.2), \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq X_2) &= P(Y_1 \geq Y_2) = 1 - P(Y_1 < Y_2) = 1 - \frac{1 - P(Y_1 = Y_2)}{2} \\ &= 1 - \frac{1 - [0.2^2 + (0.2 \times 0.8)^2 + (0.2 \times 0.8^2)^2 + (0.2 \times 0.8^3)^2 + \dots]}{2} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1 - [0.2^2 + 0.2^2 \times 0.8^2 + 0.2^2 \times 0.8^4 + 0.2^2 \times 0.8^6 + \dots]}{2}$$

$$= 1 - \frac{1 - 0.2^2}{1 - 0.8^2} = \frac{5}{9}$$

二、ChatGPT的問世帶動了AI商機的蓬勃發展，也促成了市場對GPU需求量的急遽增加。已知國內某生產GPU的工廠，所生產的GPU之壽命服從變異數為 $\theta$ 之指數分配。今由此公司之生產線隨機抽檢 $n$ 筆GPU樣本並測驗其壽命，令 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 表此 $n$ 筆相互獨立樣本之觀測值。令 $\text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ 代表取 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 之最小值， $\text{Max}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ 代表取 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 之最大值。

(一) 求出此GPU壽命分配之中位數的均勻最小變異不偏估計量 (uniformly minimum variance unbiased estimator)。(10分)

(二) 求出機率 $P[\text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} < 1]$ 之最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。(10分)

(三) 求出機率 $P[\text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} > 1, \text{Max}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} > 2]$ 。(10分)

(四) 令 $F(y)$ 為變數 $Y_i$ 之累積分配函數 (cumulative distribution function)。請求出機率

$$P[\text{Min}\{F(Y_1), F(Y_2), \dots, F(Y_n)\} > \frac{1}{4}, \text{Max}\{F(Y_1), F(Y_2), \dots, F(Y_n)\} < \frac{1}{2}] \text{。 (10分)}$$

|             |  |
|-------------|--|
| <b>試題評析</b> | 本題有考到數統之UMVUE，還有MLE之不變性與機率積分轉換定理，在普考中難度算很高的。   |
| <b>考點命中</b> | 1. 《高點·高上統計學講義》第二回，趙治勳編撰，第十章第三節，MLE之不變性。<br>2. 《高點·高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第七章第一節，機率積分轉換定理。<br>3. 《迴歸分析申論題完全制霸》，高點文化出版，趙治勳編著，第一篇第五章，UMVUE。 |

**答：**

$$\text{母體：} Y \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{\sqrt{\theta}}) \quad \text{其中} \quad V(Y) = \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{\theta}})^2} = \theta$$

$$\text{樣本：} Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{\sqrt{\theta}})^{iid}$$

(一) 令 $\eta$ 為 $Y$ 之中位數

$$F_Y(\eta) = P(Y \leq \eta) = 1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\eta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\theta}$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i \text{ 為 } \theta \text{ 之 c.s.s.} \quad , \quad \sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{Gamma}(\alpha = n, \lambda = \frac{1}{\theta})$$

已知  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$

$$E(X^c) = \frac{\Gamma(\alpha + c)}{\Gamma(\alpha)\lambda^c}, c > \alpha$$

$$E\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i}\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n)}\sqrt{\theta}$$

$$\Rightarrow E\left(-\ln\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\theta} = \eta$$

由Lehmann Scheffe,  $-\ln\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i}$  為  $\eta$  之UMVUE

(二) 令  $Y_{(1)} = \text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$

$$g_{Y_{(1)}}(y_{(1)}) = \frac{n!}{0!(n-1)!} [1 - (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}} y_{(1)}})]^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}} y_{(1)}} = \frac{n}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{n}{\sqrt{\theta}} y_{(1)}}, \quad 0 < y_{(1)}$$

$$\therefore Y_{(1)} \sim \text{Exp}\left(\lambda = \frac{n}{\sqrt{\theta}}\right)$$

$$P[\text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} < 1] = P(Y_{(1)} < 1) = 1 - e^{-\frac{n}{\sqrt{\theta}}}$$

已知  $\hat{\theta} = \bar{Y}^2$  為  $\theta$  之MLE

由MLE不變性,  $1 - e^{-\frac{n}{\sqrt{\hat{\theta}}}} = 1 - e^{-\frac{n}{\bar{Y}}}$  為  $P[\text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} < 1]$  之MLE

(三) 令  $Y_{(1)} = \text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ ,  $Y_{(n)} = \text{Max}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$

$$P[\text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} > 1 \cap \text{Max}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} > 2] = P[Y_{(1)} > 1 \cap Y_{(n)} > 2]$$

差集公式

$$\begin{aligned} &= P[Y_{(1)} > 1] - P[Y_{(1)} > 1 \cap Y_{(n)} < 2] \\ &= \{1 - P[Y_{(1)} \leq 1]\} - P[1 < Y_1 < 2 \cap 1 < Y_2 < 2 \cap \dots \cap 1 < Y_n < 2] \\ &= \{1 - [1 - e^{-\frac{n}{\sqrt{\theta}}}]\} - \{P(1 < Y < 2)\}^n \\ &= e^{-\frac{n}{\sqrt{\theta}}} - [e^{-\frac{2}{\sqrt{\theta}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}}]^n \end{aligned}$$

(四) 由機率積分轉換定理,  $U_i = F(Y_i) \stackrel{iid}{\sim} U(0,1)$

$$\begin{aligned} &P[\text{Min}\{F(Y_1), F(Y_2), \dots, F(Y_n)\} > \frac{1}{4} \cap \text{Max}\{F(Y_1), F(Y_2), \dots, F(Y_n)\} < \frac{1}{2}] \\ &= P[\text{Min}\{U_1, U_2, \dots, U_n\} > \frac{1}{4} \cap \text{Max}\{U_1, U_2, \dots, U_n\} < \frac{1}{2}] \\ &= P\left[\frac{1}{4} < U_1 < \frac{1}{2} \cap \frac{1}{4} < U_2 < \frac{1}{2} \cap \dots \cap \frac{1}{4} < U_n < \frac{1}{2}\right] \\ &= \left\{P\left[\frac{1}{4} < U_1 < \frac{1}{2}\right]\right\}^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

【版權所有，重製必究！】

年終上看  
3.2~4.4個月



台電 | 台糖 | 中油 | 台水

# 113年經濟部國營事業



## 徵才826人

就業 轉職 大好良機!

起薪年終好優渥，前景一路美好！

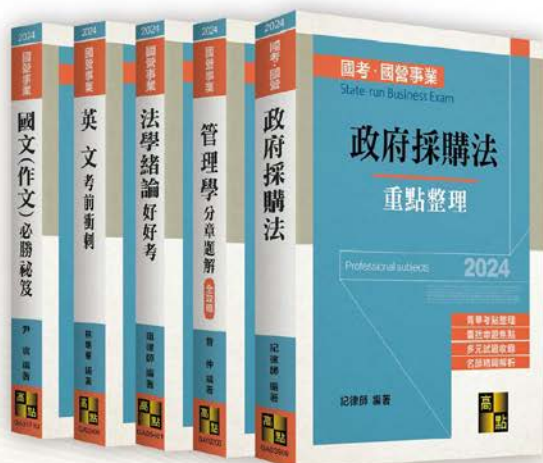
- 報名日期：113/6/19~7/2
- 考試日期：113/10/13初(筆)試

### 此次聯合招考類別為

企管129人、人資9人、  
財會31人、資訊38人、  
政風4人、法務5人、  
地政19人……等，

合計826人。

立即入手  
勝試好書



高點文化事業  
publish.get.com.tw



113/7/11-8/31年中慶特惠中  
手刀購買，快至高點網路書店