高點

堅持夢想 全力相挺

公職快速通關 EXPRESS ▸▸▸ Pass!

高普考准考證就是你的VIP券

弱科健檢

加入【高點．高上生活圈】可免費預約參加 ▸▸▸

113/7/5-14 優惠再升級！

【面授/網院】**全修課程**最高折 5,000 元，再提供線上補課
考取班享專案優惠價，最高折 10,000 元
分眾課另享現金折扣

【雲端函授】**全修課程**最高折 3,000 元

113/7/31 前 商管 會計 資訊 地政 享准考證優惠！

113 地方特考 衝刺	【總複習】網院：特價 2,000 元起、雲端：特價 3,000 元起 【申論寫作正解班】網院：特價 3,000 元起/科、雲端：特價 6 折起/科 【經典題庫班】網院：特價 2,500 元起/科、雲端：特價 6 折起/科
114 高普考 達陣	【全修課程】面授/網院：高考特價 46,000 元起、普考特價 41,000 元起 雲端：高考特價 51,000 元、普考特價 46,000 元 【考 取 班】高考：特價 75,000 元、普考：特價 65,000 元 (限面授/網院) 【狂作題班】面授：特價 6,000 元/科
單科 加強方案	【113年度】網院：定價 5 折起、雲端：定價 7 折起 【114年度】面授/網院：定價 65 折起、雲端：定價 85 折

※優惠詳情依各分班櫃檯公告為準

《統計學》

一、人工智慧的興起，帶動了市場對晶片需求量的飆升，也連帶促成相關產業的蓬勃發展。已知國內有某家公司專門生產晶片半導體製程中使用的圓形光罩。今由此公司之生產線隨機抽檢n筆光罩樣本並測量其半徑。若已知因某些特定原因造成該公司測量儀器不精準，測量之觀測值會有誤差，令$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$表其觀測誤差。假設觀測誤差$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$彼此相互獨立且服從平均數為1，變異數為$\sigma^2$之常態分配，並令$\theta$為此圓形光罩的真實半徑。令變數$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$為此n筆樣本之半徑的觀測值，則$Y_i=\theta+\varepsilon_i, i=1,2,\ldots,n$。令$F(y)$為變數$Y_i$之累積分配函數（cumulative distribution function）。（每小題10分，共80分）

(一) 求出機率$P\left(\left|\dfrac{F(Y_1)}{F(Y_2)}-1\right|\le 0.5\right)$。

(二) 求出條件機率$P\left(F(Y_2)>F(Y_1)\mid F(Y_2)\ge 0.5\right)$。

(三) 假設θ和σ^2皆未知，請利用觀測值$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$求出此光罩半徑θ之最大概似估計量（maximum likelihood estimator）。

(四) 假設θ和σ^2皆未知，請利用觀測值$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$求出此光罩面積$\pi\theta^2$之均勻最小變異不偏估計量（uniformly minimum variance unbiased estimator）。

(五) 假設θ和σ^2皆未知，請求出光罩半徑θ之信賴水準$100(1-\alpha)\%$的信賴區間。

(六) 若該公司有兩條獨立作業的生產線，且已知此兩條生產線所生產之光罩的瑕疵率皆為λ。令變數S_i為第i條生產線上檢測產品直到檢測出第一個瑕疵品前所需的檢測（良品）次數，$i=1,2$，請求出機率$P[S_1=S_2]$。

(七) 續題(六)，令變數$U=\mathrm{Min}\{S_1,S_2\}$代表取$S_1,S_2$之最小值，請求出U之機率密度函數f(u)。

(八) 求出題(七)之變數U的期望值E(U)。

試題評析	本題涵蓋機率論與數理統計之重點範圍，難度偏高，過去很少這樣出題，考生也要注意作答時間，有些計算繁瑣，容易計算錯誤，本題非常考驗考生之數學能力。
考點命中	1.《高點・高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第七章第一節：機率積分轉換定理。 2.《高點・高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第五章第四節：隨機變數之變數變換。 3.《高點・高上統計學講義》第二回，趙治勳編撰，第十章第三節：MLE。 4.《迴歸分析申論題完全制霸》，高點文化出版，趙治勳編著，第一篇第五章：UMVUE。 5.《高點・高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第五章第四節：MIN/MAX之分配。

答：

$$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n \overset{iid}{\sim} f(y),F(y)$$

$$Y_i=\theta+\varepsilon_i \qquad ,\varepsilon_i\overset{iid}{\sim}N(1,\sigma^2) \qquad ,i=1,2,\cdots,n$$

(一)

由機率積分轉換定理，$U_i=F(Y_i)\overset{iid}{\sim}U(0,1) \quad ,i=1,2,\cdots,n$

【版權所有，重製必究！】

$$f_{U_1U_2}(u_1,u_2)\overset{U_1\perp U_2}{=}f_{U_1}(u_1)\times f_{U_2}(u_2)=1\times1=1 \qquad ,0<u_1<1,0<u_2<1$$

令 $W=\dfrac{F(Y_1)}{F(Y_2)}=\dfrac{U_1}{U_2}$，$V=U_2$ $\Rightarrow \begin{matrix} U_1=WV \\ U_2=V \end{matrix}$ ， $J=\begin{vmatrix} v & w \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=v$ ， $0<wv<1,0<v<1$

$$f_{WV}(w,v)=f_{U_1U_2}(u_1=wv,u_2=v)\times|v|=v \quad ,0<wv<1,0<v<1$$

$$\therefore f_W(w)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 vdv=\frac{1}{2} & ,0<w<1 \\ \displaystyle\int_0^{1/w} vdv=\frac{1}{2w^2} & ,1\le w<\infty \end{cases}$$

$$P(|\frac{F(Y_1)}{F(Y_2)}-1|\le 0.5)=P(|W-1|\le 0.5)=P(0.5\le W\le 1.5)$$

$$=P(0.5\le W<1)+P(1\le W\le 1.5)=\int_{0.5}^{1}\frac{1}{2}dw+\int_{1}^{1.5}\frac{1}{2w^2}dw=\frac{5}{12}$$

(二)

$$P(F(Y_2)>F(Y_1)\,|\,F(Y_2)\ge 0.5)=P(U_2>U_1\,|\,U_2\ge 0.5)=\frac{P(U_2>U_1\cap U_2\ge 0.5)}{P(U_2\ge 0.5)}$$

$$=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4}$$

其中 $P(U_2\ge 0.5)=\displaystyle\int_{0.5}^{1} f_{U_2}(u_2)du_2=\int_{0.5}^{1}1du_2=\frac{1}{2}$

$$P(U_2>U_1\cap U_2\ge 0.5)=\int_{0.5}^{1}\int_{0}^{u_2} f_{U_1U_2}(u_1,u_2)du_1du_2=\int_{0.5}^{1}\int_{0}^{u_2}1du_1du_2=\frac{3}{8}$$

（三）

因為 $\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(1,\sigma^2) \quad ,i=1,2,\cdots,n$

故 $Y_i=\theta+\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(\theta+1,\sigma^2) \quad ,i=1,2,\cdots,n$

$$L(\theta,\sigma^2)=f(y_1,y_2,\ldots,y_n;\theta,\sigma^2)\overset{indep.}{=}\prod_{i=1}^{n}f(y_i;\theta,\sigma^2)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-(\theta+1))^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\theta,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-(\theta+1))^2}{2\sigma^2}$$

【版權所有，重製必究！】

令 $\dfrac{\partial \ln L(\theta,\sigma^2)}{\partial\theta}=-\dfrac{2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta-1)}{2\sigma^2}(-1)=0$ 且 $\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta,\sigma^2)}{\partial\theta^2}<0$

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\sigma^2)}{\partial \sigma^2}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta-1)^2}{2\sigma^4}=0 \quad 且 \quad \frac{\partial^2 \ln L(\theta,\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)^2}<0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}=\bar{y}-1 \\ \hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\theta}-1)}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})}{n}=\frac{n-1}{n}S^2 \end{cases} \quad 其中 S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})}{n-1}$$

$\therefore \hat{\theta}=\bar{Y}-1$為$\theta$之最大概似估計量

（四）

$(\bar{Y},S^2)$為(θ,σ^2)之joint c.s.s.

由於$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n \overset{iid}{\sim} N(\theta+1,\sigma^2)$，故$\bar{Y}-1\sim N(\theta,\frac{\sigma^2}{n})$

$$E[\pi(\bar{Y}-1)^2]=\pi\{V(\bar{Y}-1)+[E(\bar{Y}-1)]^2\}=\pi(\frac{\sigma^2}{n}+\theta^2)$$

已知 $E(S^2)=E(\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})}{n-1})=\sigma^2$

$$E[\pi(\bar{Y}-1)^2-\pi\frac{S^2}{n}]=\pi(\frac{\sigma^2}{n}+\theta^2)-\pi\frac{\sigma^2}{n}=\pi\theta^2$$

由Lehmann-Scheffe, $\pi(\bar{Y}-1)^2-\pi\frac{S^2}{n}$為$\pi\theta^2$之UMVUE

（五）

點估計： $\bar{Y}-1\sim N(\theta,\frac{\sigma^2}{n})$

樞紐量：$\frac{\bar{Y}-1-\theta}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t_{(n-1)}$

機率區間： $P(-t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}\le\frac{\bar{Y}-1-\theta}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\le t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)})=1-\alpha$

信賴區間： $P((\bar{Y}-1)-t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}}\le\theta\le(\bar{Y}-1)+t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}})=1-\alpha$

結論： θ之$100(1-\alpha)\%$ C.I.為

$$((\bar{Y}-1)-t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}},(\bar{Y}-1)+t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}})$$

【版權所有，重製必究！】

(六)

設 $X_i=S_i+1\overset{iid}{\sim}Geo(p=\lambda) \quad i=1,2$

$$P(S_1=S_2)=P(X_1=X_2)$$
$$=P(X_1=1\cap X_2=1)+P(X_1=2\cap X_2=2)+P(X_1=3\cap X_2=3)+\cdots\cdots$$
$$=P(X_1=1)P(X_2=1)+P(X_1=2)P(X_2=2)+P(X_1=3)P(X_2=3)+\cdots\cdots$$
$$=\lambda\lambda+\lambda(1-\lambda)\lambda(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda)^2\lambda(1-\lambda)^2+\cdots\cdots$$
$$=\lambda^2[1+(1-\lambda)^2+(1-\lambda)^4+(1-\lambda)^6+\cdots\cdots] \quad \text{(無窮等比級數和)}$$
$$=\lambda^2[\frac{1}{1-(1-\lambda)^2}]=\frac{\lambda}{2-\lambda}$$

(七)

$$X_i=S_i+1\overset{iid}{\sim}Geo(p=\lambda)\quad i=1,2\quad ,F_{X_i}(x_i)=P(X_i\le x_i)=1-(1-\lambda)^{x_i}$$
$$F_U(u)=P(U\le u)=P(Min\{S_1,S_2\}\le u)=1-P(Min\{S_1,S_2\}>u)$$
$$=1-P(S_1>u\cap S_2>u)\overset{S_1\perp S_2}{=}1-P(S_1>u)P(S_2>u)=1-[P(S_1>u)]^2$$
$$=1-[P(X_1>u+1)]^2=1-[(1-\lambda)^{u+1}]^2=1-(1-\lambda)^{2u+2}$$
$$f_U(u)=F_U(u)-F_U(u-1)=[1-(1-\lambda)^{2\mu+2}]-[1-(1-\lambda)^{2(u-1)+2}]$$
$$=(1-\lambda)^{2\mu}[1-(1-\lambda)^2]\quad ,u=0,1,2,\cdots\cdots$$

(八)

$$E(U)=\sum_{u=0}^{\infty}u(1-\lambda)^{2\mu}[1-(1-\lambda)^2]$$
$$=[1-(1-\lambda)^2]\times[(1-\lambda)^2+2(1-\lambda)^4+3(1-\lambda)^6+4(1-\lambda)^8+\cdots\cdots]$$

(無窮等差等比級數和)

$$=[1-(1-\lambda)^2]\times\frac{1}{1-(1-\lambda)^2}\frac{(1-\lambda)^2}{1-(1-\lambda)^2}=\frac{(1-\lambda)^2}{1-(1-\lambda)^2}$$

二、臺灣量子國家隊已成軍5年，去年突破技術瓶頸，成功自製出5量子位元之超導量子電腦，象徵著臺灣的量子時代來臨。已知團隊開發的量子電腦有一個核心的元件，此核心元件是由三個電路組件串聯及並聯構成。令變數T_1,T_2,T_3分別代表此三個電路組件的壽命，此核心元件是先由第一及第二個電路組件串聯後，再和第三個電路組件並聯而成，因此整個核心元件的壽命是$X=Max\{Min\{T_1,T_2\}T_3\}$，此處$Max\{a,b\}$代表取a,b之最大值，$Min\{a,b\}$代表取a,b之最小值。假設此三個電路組件的壽命彼此相互獨立，皆服從具有平均數為2之指數分配。（每小題10分，共20分）

(一) 求出變數X之機率密度函數f(x)。

(二) 求出變數X之變異數Var(X)。

【版權所有，重製必究！】

試題評析	本題有關計算MIN/MAX之分配，數學程度較好之考生只要小心計算，滿分不難。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第五章第四節：MIN/MAX之分配。

答：

$T_i \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda=\frac{1}{2})$, $P(T_i \le t_i)=1-e^{-\frac{1}{2}t_i}$

(一) $F_X(x)=P(X\le x)=P(Max\{Min\{T_1,T_2\},T_3\}\le x)$

$$\overset{iid}{=}P(Min\{T_1,T_2\}\le x)\times P(T_3\le x)\overset{iid}{=}[1-P(T_1>x)\times P(T_2>x)]\times P(T_3\le x)$$

$$=[1-e^{-\frac{1}{2}x}\times e^{-\frac{1}{2}x}]\times(1-e^{-\frac{1}{2}x})=1-e^{-\frac{1}{2}x}-e^{-x}+e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+e^{-x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}\quad 0<x<\infty$$

(二) $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{82}{9}-(\frac{7}{3})^2=\frac{11}{3}$

其中 $E(X)=\int_0^\infty x(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+e^{-x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x})dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-\frac{1}{2}x}dx+\int_0^\infty xe^{-x}dx-\frac{3}{2}\int_0^\infty xe^{-\frac{3}{2}x}dx \qquad \text{(Gamma積分)}$$

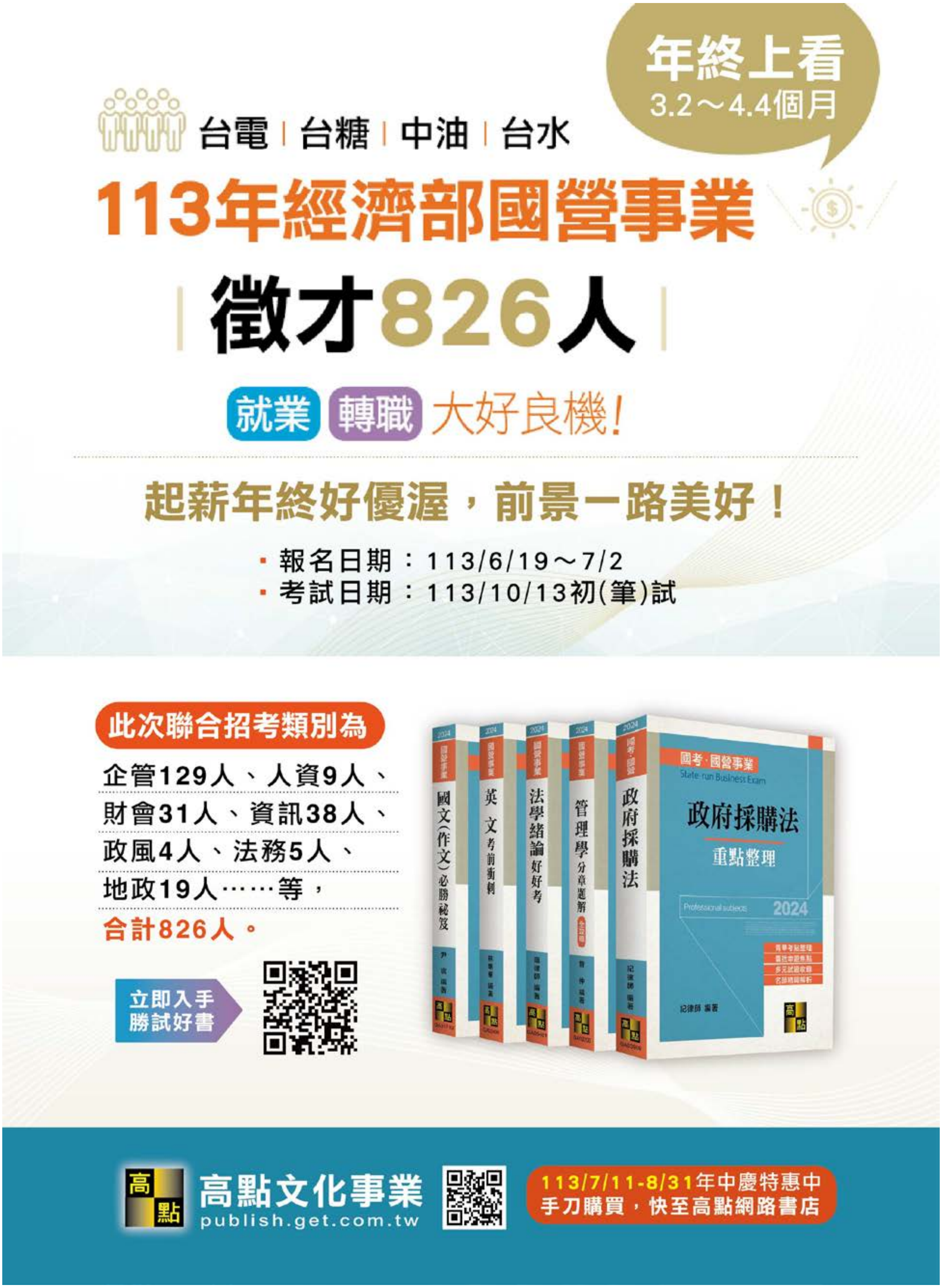
$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2)}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{\Gamma(2)}{(1)^2}-\frac{3}{2}\frac{\Gamma(2)}{(\frac{3}{2})^2}=\frac{7}{3}$$

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+e^{-x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2e^{-\frac{1}{2}x}dx+\int_0^\infty x^2e^{-x}dx-\frac{3}{2}\int_0^\infty x^2e^{-\frac{3}{2}x}dx \qquad \text{(Gamma積分)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(3)}{(\frac{1}{2})^3}+\frac{\Gamma(3)}{(1)^3}-\frac{3}{2}\frac{\Gamma(3)}{(\frac{3}{2})^3}=\frac{82}{9}$$

【版權所有，重製必究！】



年終上看
3.2～4.4個月
台電 | 台糖 | 中油 | 台水
113年經濟部國營事業
徵才826人
就業 轉職 大好良機！
起薪年終好優渥，前景一路美好！
‧報名日期：113/6/19～7/2
‧考試日期：113/10/13初(筆)試
此次聯合招考類別為
企管129人、人資9人、
財會31人、資訊38人、
政風4人、法務5人、
地政19人……等，
合計826人。
立即入手
勝試好書
國文(作文)必勝祕笈
英文考前衝刺
法學緒論好好考
管理學分章題解
政府採購法
國考‧國營事業
政府採購法
重點整理
2024
高點文化事業
publish.get.com.tw
113/7/11-8/31年中慶特惠中
手刀購買，快至高點網路書店