
一堆例題見解，怎麼寫才高分？

**申論寫作班 ▶ 論正技巧** 立即上課

**緊扣命題趨勢，個人化批改指導，厚植寫作力！**

**高分實證**

李○儀 應屆考取 112高考財稅行政【探花】

**推薦大家可報名高普考申論題寫作班**，對於民法申論題搶分非常有幫助，老師會帶大家作一些經典範例，詳細地講解並分享許多作答技巧，每週還會提供題目讓大家帶回去練習。

※【面授/VOD】3,500 起/科；【雲端】7折 起

寫不完或寫太少，時間難拿捏？

**題庫班 ▶ 弱科強化** 立即上課

**專業師資嚴選經典考古題，精析關鍵考點！**

**高分實證**

薛○匀 在職考取 112高考經建行政、普考經建行政

**建議務必參加班內題庫班或總複習班**，網院課程都獨自念書，會有盲點而不自知，**藉由題庫練習由老師批改**可以更有信心和確認作答方式，最後一個月考古題總複習才不會慌亂。

※【面授/VOD】3,000 起/科；【雲端】7折 起

寫得頭頭是道，但切中核心嗎？

**狂作題班 ▶ 速效提分**

**名師親領搭配助教輔導，仿真模測有效提分！**

**高分實證**

黃○瑜 連續考取：112高考會計、普考會計、111記帳士

**狂作題班我只有報鄭泓老師的中會**，每次小考完都會有助教檢討，助教會整理一些比較容易犯錯的地方及一些陷阱題供大家注意，**讓我覺得狂作題班是很值得報名的！**

李○鳳 應屆考取 112高考經建行政【探花】、普考經建行政、111地特四等新北市經建行政【探花】

我有報名**經濟學的狂作題班跟題庫班**，主要目的是在經濟學題庫班下課後提問，然後在狂作題班問老師貨銀跟國經的問題，老師們也都很有耐心且清楚地回答學員的問題。

※【面授限定】6,000 起/科

## 112/12/9-15 考場最禮遇！

・持112地方特考准考證報名，並加入生活圈索取優惠券，**最高再優1000元！**
・最新優惠詳洽**各分班櫃檯**或**高點高上國考生活圈**

另有**行動版課程**隨時可上試聽&購課，請至

① 知識達購課館 ec.ibrain.com.tw

② 高點網路書店 publish.get.com.tw

# 《統計學》

一、設$X_1$、$X_2$、$X_3$為互相獨立的標準常態隨機變數。令 $Y_1=(X_1-X_2)/\sqrt{2}$ ，$Y_2=(X_1+X_2-2X_3)/\sqrt{6}$ 與 $Y_3=(X_1+X_2+X_3)/\sqrt{3}$ 。試求：

(一)$Y_1$、$Y_2$、$Y_3$是否分別具有相同的機率密度函數，須完整求出各自的機率密度函數。（15分）

(二)求$Y_1$、$Y_2$和$Y_3$之聯合分配函數。（10分）

| 試題評析 | 本題為多變量常態分配的線性轉換，是多數考生容易遺漏的單元。 |
|---|---|

**答**：

（一）

$$\frac{(X \quad )}{\sqrt{2}} \quad N(0\ 1)$$

$$\frac{(X \quad\quad )}{\sqrt{6}} \quad N(0\ 1)$$

$$\frac{(X \quad\quad )}{\sqrt{3}} \quad N(0\ 1)$$

（二）

$$\begin{pmatrix} X_2 \end{pmatrix} \quad N(0 \quad )$$

$$\begin{pmatrix} Y_2 \end{pmatrix} \quad\quad N(0\ \Sigma)$$

其中

$$\begin{pmatrix} \overline{\sqrt{2}} & \overline{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{\ }} & \overline{\sqrt{6}} & \overline{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \overline{\sqrt{\ }} & \overline{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} Y_2 \end{pmatrix} \quad N(0 \quad )$$



二、令$X_1, \cdots, X_n$為抽取自 $f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x}$ ，$x>0$之隨機樣本。求下列參數的齊一最小變異不偏估計（Uniformly Min. Variance Unbiased Estimator）：

(一)$\theta$。（10分）

(二)$\frac{1}{\theta}$。（15分）



| 試題評析 | 本題為齊一最小變異不偏估計的題目，須特別留意指數族的性質與齊一最小變異不偏估計的相關定理。 |
|---|---|

**答：**

（一）

根據指數族的性質，$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 為 $\theta$ 之完備充分統計量

令 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$Y \sim Gamma\left(\alpha=n, \beta=\frac{1}{\theta}\right)$$

由於

$$E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)=E\left(\frac{1}{Y}\right)=\frac{1}{(n-1)\frac{1}{\theta}}=\frac{\theta}{(n-1)}$$

故 $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ 為 $\theta$ 之不偏估計量

又

$$E\left(\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\middle|\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

根據Rao-Blackwell定理，$\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ 為 $\theta$ 之齊一最小變異不偏估計。

（二）

根據指數族的性質，$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 為 $\theta$ 之完備充分統計量

由於

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=E(\bar{X})=\frac{1}{\theta}$$

故 $\bar{X}$ 為 $\frac{1}{\theta}$ 之不偏估計量

又

$$E\left(\bar{X}\middle|\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\middle|\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\bar{X}$$

根據Rao-Blackwell定理，$\bar{X}$ 為 $\frac{1}{\theta}$ 之齊一最小變異不偏估計。

三、某公司須從三種退休計畫方案選擇一種方案。該公司想研究的問題為：喜愛那一種方案的員工與其工作性質有無關係？經調查得結果如下表所列，令$P_{ij}$為第i種方案受第j類員工喜愛的母體比例，i = 1, 2, 3，j = 1, 2, 3, 4。

觀察個數

| | 方案1 | 方案2 | 方案3 | 總和 |
|---|---|---|---|---|
| 第1類員工 | 160 | 30 | 10 | 200 |
| 第2類員工 | 140 | 40 | 20 | 200 |
| 第3類員工 | 80 | 10 | 10 | 100 |
| 第4類員工 | 70 | 20 | 10 | 100 |
| 合　　計 | 450 | 100 | 50 | 600 |

(一)試以$P_{ij}$陳述虛無與對立假設（$H_0$和$H_1$）。（8 分）

(二)試執行本題的檢定（含檢定統計量、棄卻域及結論），令顯著水準α = 0.05。（17分）

$X^2_{0.05,8}=15.51$、$X^2_{0.05,6}=12.5916$、$X^2_{0.05,4}=9.4877$

$X^2_{0.025,8}=17.5346$、$X^2_{0.025,6}=14.4494$、$X^2_{0.025,4}=11.1433$

| 試題評析 | 卡方檢定的獨立性檢定，作答時應注意計算過程與自由度。 |
|---|---|

**答**：
（一）
$H_0: p_{i1} = p_{i2} = p_{i3} = p_{i4}, \forall i = 1,2,3$ versus $H_1: \exists\, p_{ij} \neq p_{ik}, j \neq k$
（二）
將預期個數填入表格：

| | 方案1 | 方案2 | 方案3 | 總和 |
|---|---|---|---|---|
| 第1類員工 | 160<br>(150) | 30<br>(100/3) | 10<br>(50/3) | 200 |
| 第2類員工 | 140<br>(150) | 40<br>(100/3) | 20<br>(50/3) | 200 |
| 第3類員工 | 80<br>(75) | 10<br>(100/6) | 10<br>(50/6) | 100 |
| 第4類員工 | 70<br>(75) | 20<br>(100/6) | 10<br>(50/6) | 100 |
| 合計 | 450 | 100 | 50 | 600 |

$$\varphi = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\frac{\left(O_{ij}-E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} \sim \chi^2(6)$$
$$\alpha = 0.05, RR = \{\varphi | \varphi > \chi^2_{0.05}(6) = 12.5916\}$$
$$\varphi^* = 11 \notin RR$$
故不拒絕虛無假設，在5%的顯著水準下，無足夠證據支持喜愛哪一種方案與員工工作性質有關。

四、一家消費者雜誌想要比較三個不同品牌的手電筒電池的壽命。該雜誌對三個不同品牌的電池抽取獨立隨機樣本，得出以下使用壽命（以小時為單位）。

| Brand A | Brand B | Brand C |
|---|---|---|
| 38 | 32 | 24 |
| 36 | 27 | 25 |
| 31 | 28 | 29 |
| 42 | | 26 |
| 29 | | |

（一）檢定此三個品牌的手電筒電池的平均壽命是否有差異？須列出虛無與對立假設、建構變方分析表（ANOVA table）、棄卻域和結論。（令顯著水準α＝0.05）（10分）
$f_{0.05,3,9}=3.8625$、$f_{0.05,3,10}=3.7083$、$f_{0.05,3,11}=3.5874$、$f_{0.05,2,9}=4.2565$、$f_{0.05,2,10}=4.1028$、$f_{0.05,2,11}=3.9823$

（二）試以顯著水準α＝0.05，執行Tukey的多重全距檢定（Tukey's multiple range test），比較三個不同品牌的手電筒電池的平均壽命。須列出Tukey多重全距檢定的信賴區間公式，計算三對平均差之Tukey全距信賴區間，最後做結論。（15分）
$q_{0.05,2,12}=3.08$、$q_{0.05,2,11}=3.11$、$q_{0.05,2,10}=3.15$、$q_{0.05,2,9}=3.20$、$q_{0.05,3,12}=3.77$、$q_{0.05,3,11}=3.82$、$q_{0.05,3,10}=3.88$、$q_{0.05,3,9}=3.95$



| 試題評析 | 本題除了ANOVA外還有Tukey多重檢定，作答需特別注意查表。 |
|---|---|

**答**：

（一）

令母體模型 $Y_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij}\overset{iid}{\sim}N(0,\sigma^2)$

其中 $Y_{ij}$ 代表電池平均壽命，$\alpha_i$ 代表品牌 $i$ 之影響

$H_0:\alpha_i$ 全相同 versus $H_1:\alpha_i$ 不全相同

$$\varphi=\frac{MSF}{MSE}\sim F(2,9)$$

$$\alpha=0.05, RR=\{\varphi|\varphi>F_{0.05}(2,9)=4.2565\}$$

| | SS | df | MS | F |
|---|---|---|---|---|
| Factor | $\frac{11887}{60}$ | 2 | $\frac{11887}{120}$ | $\frac{35661}{5552}$ |
| Error | $\frac{694}{5}$ | 9 | $\frac{694}{45}$ | |
| Total | $\frac{4043}{12}$ | 11 | | |

$$\varphi^*=\frac{35661}{5552}\approx 6.4231\in RR$$

故拒絕虛無假設，在5%的顯著水準下，有足夠證據支持不同品牌電池壽命不全相同。

（二）

Tukey法的 $\mu_i-\mu_j$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 區間估計為

$$\left[\bar{Y}_i-\bar{Y}_j\pm\frac{q_\alpha(m,n_T-m)}{\sqrt{2}}\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}\right]$$

因此

$\mu_A-\mu_B$ 之95%信賴區間為

$$\left[35.2-29\pm\frac{3.95}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{694}{45}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)}\right]=[-1.810,14.210]$$

$\mu_B-\mu_C$ 之95%信賴區間為

$$\left[29-26\pm\frac{3.95}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{694}{45}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}\right]=[-5.377,11.378]$$

$\mu_A-\mu_C$ 之95%信賴區間為

$$\left[35.2-26\pm\frac{3.95}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{694}{45}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)}\right]=[1.842,16.558]$$

因為 $\mu_A-\mu_C$ 之95%信賴區間不包含0，在5%顯著水準下，有足夠證據支持品牌A與品牌C的平均電池壽命不同。