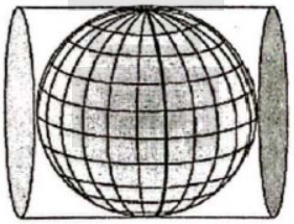
《測量學》

一、橫麥卡托投影主要是利用一截面為圓形的圓柱，橫套相切／割於地球以完成投影，如下圖所示。請問此一投影方法與通用橫麥卡托投影（Universal Transverse Mercator, UTM）主要的不同之處有那兩點？並請說明UTM這樣做的優點為何。（25分）



試題評析	本題係地圖投影基本概念，屬基本題型。
考點命中	《高點土木測量學(一)講義》，第五章坐標系統，P113

答：

一、橫麥卡托投影與通用橫麥卡托投影的主要不同點

1.切割方式：橫麥卡托投影是利用橫套相切割於地球，橫麥卡托投影與南北極相切。而通用橫麥卡托投影（UTM）是利用縱套相切割於地球，以完成投影，UTM與赤道相切。

2.對地區面積與形狀變形的影響：在橫麥卡托投影中，鄰近赤道地區的面積與形狀變化最大，南北兩極的面積與形狀變形較小。反之，在UTM投影中，赤道地區的面積與形狀變化較小，南北兩極的面積與形狀變形最大。

二、通用橫麥卡托投影（UTM）的優點

1.人口分布：世界人口分布主要在北緯20度至60度的地區，約佔全世界人口的80%，UTM在這些地區的地圖精度相當高，產生的面積誤差或形狀誤差甚小，因此可以提供給多數人使用。

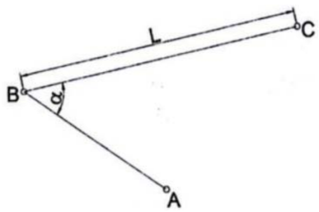
2.兩極地區的考量：南北兩極地區的人口較少，需要使用地圖的人數也較少。而且，兩極地區已有專用的圓柱投影地圖可供使用，因此對於UTM在兩極地區的變形影響可以視為較小的問題。

二、已知A點的坐標N=100m、E=50m，B點的坐標N=200m、E=-100m。為測量C點的坐標，吾人在B點架設全測站，經過多次量測獲得L=297.810±0.020m、$\alpha=46°31'13''\pm10''$，試回答下列問題（角度請用度分秒來作答）：

(一)請問方位角φ_{AB}為何？(5分)

(二)請問方位角φ_{AB}為何？方位角φ_{BC}的誤差為何？(5分)

(三)請問C點坐標為何？C點坐標的誤差為何？(15分)



試題評析	本題係為單角單邊光線法，屬常考之基本題型。
考點命中	《高點土木測量學(一)講義》，第一章測量概論，P5

答：

(一) 計算方位角ϕ_{AB}

$$\theta_{AB}=\tan^{-1}\left|\frac{\Delta E_{AB}}{\Delta N_{AB}}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{E_B-E_A}{N_B-N_A}\right|$$

$$\Rightarrow \theta_{AB}=\tan^{-1}\left|\frac{-100-50}{200-100}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{-150}{100}\right|=56^\circ18'36''$$

$$\varphi_{AB}=360^\circ-\theta_{AB}=360^\circ-56^\circ18'36''=303^\circ41'24''$$

(二) 計算方位角ϕ_{BC}及方位角ϕ_{BC}的中誤差

$$\varphi_{BC}=\varphi_{AB}-180^\circ-\alpha=303^\circ41'24''-180^\circ-46^\circ31'13''=77^\circ10'11''$$

$$\frac{\partial\varphi_{BC}}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varphi_{AB}-180^\circ-\alpha)=-1$$

$$\frac{\sigma_{\varphi_{BC}}}{\rho''}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_{BC}}{\partial\alpha}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_\alpha}{\rho''}\right)^2}=\pm\frac{\sigma_\alpha}{\rho''}\Rightarrow\sigma_{\varphi_{BC}}=\sigma_\alpha=\pm10"$$

(三)計算C點坐標及C點坐標的中誤差

1.計算$E_C\pm\sigma_{E_C}$

$$E_C=E_B+L\times sin\varphi_{BC}=-100+297.810\times sin77^\circ10'11"=190.374m$$
$$\frac{\partial E_C}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}\left(E_B+L\times sin\varphi_{BC}\right)=\sin\varphi_{BC}$$
$$\frac{\partial E_C}{\partial\varphi_{BC}}=\frac{\partial}{\partial\varphi_{BC}}(E_B+L\times sin\varphi_{BC})=L\times\cos\varphi_{BC}$$
$$\sigma_{E_C}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial E_C}{\partial L}\right)^2\times\sigma_L^2+\left(\frac{\partial E_C}{\partial\varphi_{BC}}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_{\varphi_{BC}}}{\rho''}\right)^2}$$
$$\sigma_{E_C}=\pm\sqrt{(\sin\varphi_{BC}\times\sigma_L)^2+\left(L\times\cos\varphi_{BC}\times\frac{\sigma_{\varphi_{BC}}}{\rho''}\right)^2}$$
$$\sigma_{E_C}=\pm\sqrt{(\sin77^\circ10'11"\times0.020)^2+\left(297.810\times\cos77^\circ10'11"\times\frac{10''}{206265''}\right)^2}$$
$$\sigma_{E_C}=\pm0.0198\approx\pm0.020m$$

2.計算$N_C\pm\sigma_{N_C}$

$$N_C=N_B+L\times cos\varphi_{BC}=200+297.810\times cos77^\circ10'11"=266.133m$$
$$\frac{\partial N_C}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}\left(N_B+L\times cos\varphi_{BC}\right)=\cos\varphi_{BC}$$
$$\frac{\partial N_C}{\partial\varphi_{BC}}=\frac{\partial}{\partial\varphi_{BC}}\left(N_B+L\times cos\varphi_{BC}\right)=-L\times\sin\varphi_{BC}$$

$$\sigma_{N_C}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial EN_C}{\partial L}\right)^2\times\sigma_L^2+\left(\frac{\partial EN_C}{\partial\varphi_{BC}}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_{\varphi_{BC}}}{\rho''}\right)^2}$$

$$\sigma_{N_C}=\pm\sqrt{(\cos\varphi_{BC}\times\sigma_L)^2+\left(-L\times\sin\varphi_{BC}\times\frac{\sigma_{\varphi_{BC}}}{\rho''}\right)^2}$$

$$\sigma_{E_C}=\pm\sqrt{(\cos77°10'11"\times0.020)^2+\left(-297.810\times\sin77°10'11"\times\frac{10''}{206265''}\right)^2}$$

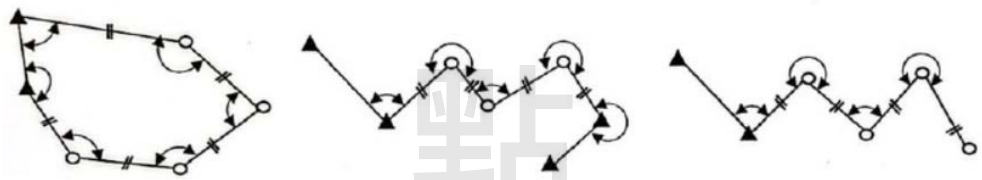
$$\sigma_{E_C}=\pm0.0148\approx\pm0.015m$$

$$\Rightarrow E_C\pm\sigma_{E_C}=190.374\pm0.020m$$
$$N_C\pm\sigma_{N_C}=266.133\pm0.015m$$

三、如圖，試問：

(一)圖一至圖三分別為何種導線？並計算各導線的未知數數目和多餘觀測數。(10分)

(二)說明圖一導線型態的可供閉合(檢核)條件，並論述其觀測量的平差步驟或處理流程。(15分)



(圖一)　　(圖二)　　(圖三)

圖中符號：角度觀測量、〃距離觀測量、▲控制點、○待測導線點

試題評析	本題係導線測量分類及閉合導線計算流程與平差計算說明，屬中等偏易之題型。
考點命中	《高點土木測量學(二)講義》，第七章導線測量，P1

答：

(一) 圖一至圖三分別的導線種類及各導線的未知數目和多餘觀測數

編號	導線類型	角度觀測數	距離觀測數	總觀測數	未知數	多餘觀測數
圖一	***閉合***	6	5	11	**8**	**3**
圖二	***附合***	5	4	9	**6**	**3**
圖三	***展開***	4	4	8	**8**	**0**

(二)說明圖一導線型態的可供閉合(檢核)條件，並論述其觀測量的平差處理流程。

1.圖一的導線型態可供檢核閉合條件

包含：角度閉合差1個、縱橫距閉合差2個，其總和數量應與多餘觀測數一致。

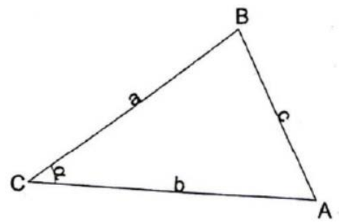
2.平差步驟或處理流程

步驟	相關計算公式
(1)內角和計算	$[\alpha] = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$
(2)內角和平差	內角閉合差$f_w = [\alpha] - (n-2) \times 180°$ 改正值$v = -f_w/n$
(3)方位角推算	$\phi_{BC} = \phi_{AB} \pm 180° \pm \alpha$ α正負須考量點位為順或逆時鐘配置
(4)縱橫距計算	$\Delta X = L_{AB} \times sin_{AB}$ $\Delta Y = L_{AB} \times cos_{AB}$
(5)縱橫距平差	橫距閉合差$W_X = [\Delta_X]$；縱距閉合差$W_Y = [\Delta_Y]$ 導線閉合差$W_L = \sqrt{W_X^2 + W_Y^2}$ $V_{X_i} = L_i \times \frac{W_X}{[L]}$；$V_Y = L_i \times \frac{W_Y}{[L]}$
(4)坐標值計算	$X_B = X_A + \Delta X_{AB} + V_{X_{AB}}$ $Y_B = Y_A + \Delta Y_{AB} + V_{Y_{AB}}$
(5)導線可靠度 (單一指標)	閉合比數$P = \frac{W_L}{[L]} = \frac{1}{\frac{[L]}{W_L}}$

四、某土地的形狀為三角形ABC（如圖所示），用全測站（total station）經過多次量測，獲得a=12300.00±0.10m、b=16800.00±0.20m、α=38°00′00″±30″，試回答下列問題：

(一)請問土地的面積為何？面積的誤差為何？（15分）

(二)請問c邊的邊長為何？已知地球半徑6371km，若進行A點至B點的三角高程測量，請問因地球曲率造成A、B兩點的高程差為何？（10分）



試題評析	本題係為三角形面積計算及精度分析，屬常考之基本題型。
考點命中	《高點土木測量學(一)講義》，第一章測量概論，P5

答：

(一) 計算土地的面積 A 及面積的中誤差σ_A

$$A=\frac{1}{2}absin\alpha=\frac{1}{2}\times 12300\times 16800\times sin38°=63{,}610{,}143.63m^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2}absin\alpha\right)=\frac{1}{2}bsin\alpha=\frac{A}{a}$$

$$\frac{\partial A}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{2}absin\alpha\right)=\frac{1}{2}asin\alpha=\frac{A}{b}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{2}absin\alpha\right)=\frac{1}{2}abcos\alpha=\frac{A}{tan\alpha}$$

$$\sigma_A=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2\times\sigma_a^2+\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2\times\sigma_b^2+\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)^2\times\sigma_\alpha^2}=\sigma_A=\pm A\sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2+\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{tan\alpha}\times\frac{\sigma_\alpha}{\rho}\right)^2}$$

$$\sigma_A=\pm 63{,}610{,}143.63\times\sqrt{\left(\frac{0.10}{12300}\right)^2+\left(\frac{0.20}{16800}\right)^2+\left(\frac{1}{tan38°}\times\frac{30''}{206265''}\right)^2}=\pm 11{,}877.10m^2$$

(二) 計算 C 邊的邊長及地球曲率差

$$c^2=a^2+b^2-2abcos\alpha$$

$$c=\sqrt{12300^2+16800^2-2\times 12300\times 16800\times cos38°}=10385.61m$$

$$C_E=\frac{c^2}{2R}=\frac{10385.61^2}{2\times 6371\times 1000}=8.46m$$