《測量學概要》

一、一條水準線的逐差水準測量往測BM1到BM2的高程差觀測值為12.404公尺，水準線長為2.56公里；返測BM2到BM1的高程差觀測值為-12.382公尺，水準線長為2.60公里，試由這些數據計算往返測閉合差（往返測閉合差請以a mm$\sqrt{K}$表示，K係水準路線長，以公里計），以及計算BM2到BM1高程差平均值。（高程差平均值計算到毫米，毫米以下四捨五入；a須計算至小數以下1位）（25分）

試題評析	本題為水準測量精度評估之應用。
考點命中	Chap03水準測量之Page.03

解：

(一)、閉合精度計算

往返之閉合差=12.404-12.382=0.022m=22mm

總測線長=2.56+2.60=5.16km

依據閉合精度之計算公式：$m=x^{mm}\sqrt{K^{km}}$

$22mm=x^{mm}\sqrt{5.16^{km}}$

X=9.7mm

即，本次觀測之閉合精度為$9.7^{mm}\sqrt{K^{km}}$

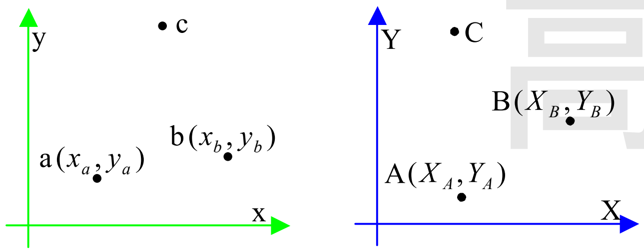
(二)、高程差平均值=(12.404+12.382)/2=12.393m

二、試寫出平面三數正交轉換、四參數相似轉換，以及六參數仿射轉換的公式，並試各舉一例說明應用這些轉換的時機。（25分）

試題評析	本題為坐標系統中關於座標轉換的討論。可從各種轉換公是中參數的意義了解其目的。
考點命中	Chap05坐標系統之Page07六參數轉換例題

解：

假設兩坐標系統(x, y)、(X, Y)，如下圖



(一). 平面三參數正交轉換

1. 含三參數:旋轉(θ)、平移(Tx,Ty)
2. 旋轉 Rotation：(x,y)→(X',Y')

因 $\begin{bmatrix} X'_C \\ Y'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}$，故 $\begin{aligned} X'_C &= x_c(\cos(-\theta)) + y_c(\sin(-\theta)) \\ Y'_C &= -x_c(\sin(-\theta)) + y_c(\cos(-\theta)) \end{aligned}$

3. 平移 Translation：(X',Y') →(X,Y)

$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_C \\ Y'_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_C \\ Y'_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \end{bmatrix}$(不含尺度變化)

4. 合併平移與旋轉效果: $\begin{aligned} X_A &= +\cos\theta \cdot x_a + \sin\theta \cdot y_a + T_{XA} \\ Y_A &= -\sin\theta \cdot x_a + \cos\theta \cdot y_a + T_{YA} \end{aligned}$

改用a、b、c、d參數取代(其中 $\begin{aligned} a &= +\cos\theta \\ b &= -\sin\theta \end{aligned}$、$\begin{aligned} c &= T_{XA} \\ d &= T_{YA} \end{aligned}$)

$$X_A = a \cdot x_a + b \cdot y_a + c$$
$$Y_A = -b \cdot x_a + a \cdot y_a + d$$

5. 使用時機:
需維持轉換前後角、距關係且尺度不變(面積固定)的應用。
如都市計畫樁位坐標系統自 TWD67 轉換至 TWD97。

(二). 四參數相似轉換

1. 含四元素：比例尺(S)、旋轉(θ)、平移(Tx,Ty)
2. 比例尺 Scale：$S = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{ab}} = \dfrac{\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}$
3. 旋轉 Rotation：(x,y)→(X',Y') $\begin{bmatrix} X'_C \\ Y'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}$
4. 平移 Translation：(X',Y') →(X,Y) $\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} X'_C \\ Y'_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \end{bmatrix}$(含尺度變化)
5. 合併尺度、平移與旋轉效果: $\begin{aligned} X_A &= S\cos\theta \cdot x_a + S\sin\theta \cdot y_a + T_{XA} \\ Y_A &= -S\sin\theta \cdot x_a + S\cos\theta \cdot y_a + T_{YA} \end{aligned}$

改用a、b、c、d參數取代，其中 $\begin{matrix} a = S\cos\theta \\ b = -S\sin\theta \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} c = T_{XA} \\ d = T_{YA} \end{matrix}$

$$X_{\mathrm{A}} = a\cdot x_a + b\cdot y_a + \mathrm{c}$$

$$Y_{\mathrm{A}} = -b\cdot x_a + a\cdot y_a + \mathrm{d}$$

6. 至少兩已知投影前後坐標之控制點 A(XA、YA、xa、ya)、B(XB、YB、xb、yb)代回前式，可得 4 道方程式，恰好可解 4 個未知數(a、b、c、d)。
7. 使用時機:需維持轉換前後角、距關係但尺度可變的應用。

(三). 六參數仿射轉換

甲、 特性：

1. x、y 軸上比例尺不一致。
2. x、y 軸不垂直。
3. 具六參數(平移二、旋轉一、剪量一、比例尺二)。
4. 至少三點已知轉換前後座標之控制點才可解算，三點以上可平差。

乙、 公式：

1. 兩軸上比例尺不一致: $\begin{bmatrix} \mathrm{X}_s \\ \mathrm{Y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

2. 兩軸不直(剪量): $\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{\varepsilon s} \\ \mathrm{Y}_{\varepsilon s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon_y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{X}_s \\ \mathrm{Y}_s \end{bmatrix}$

3. 兩坐標系之間的旋轉: $\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{\theta\varepsilon s} \\ \mathrm{Y}_{\theta\varepsilon s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{\varepsilon s} \\ \mathrm{Y}_{\varepsilon s} \end{bmatrix}$

4. 兩坐標系之間的平移: $\begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_{\theta\varepsilon s} \\ \mathrm{Y}_{\theta\varepsilon s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix}$

5. 整合: $\begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_{\theta\varepsilon s} \\ \mathrm{Y}_{\theta\varepsilon s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sin\varepsilon_y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_X\cos\theta & S_Y(\sin\theta + \sin\varepsilon\cdot\cos\theta) \\ -S_X\sin\theta & -S_Y(\sin\varepsilon\cdot\sin\theta + \cos\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = \begin{matrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ b_1 + b_2x + b_3y \end{matrix}$$

6. $\begin{matrix} X = a_1 + a_2x + a_3y \\ Y = b_1 + b_2x + b_3y \end{matrix}$，其中 a_1, b_1 表平移， a_2, b_2, a_3, b_3 表比例尺與旋轉。

7. $\begin{bmatrix} V_{X1} \\ V_{X2} \\ V_{X3} \\ V_{X4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ .... $\begin{bmatrix} V_{Y1} \\ V_{Y2} \\ V_{Y3} \\ V_{Y4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

丙、 解算步驟：

利用三點或三點以上已知投影前(x,y)後座標(X,Y)之控制點求 $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ 等六參數。再求其他點之轉換座標。

丁、 使用時機：不同坐標系統之間轉換且需要強制附合的情況。如控制點的轉換。

三、何謂雙矩偏心測量？以此法求待定點坐標時，需要那些觀測量？並請說明應用此法如何計算待定點坐標？（25分）

試題評析	本題為實務工作上偶爾會採用的觀測模式，為了獲得被遮蔽的目標點坐標而採用的作業模式。類似都市計畫樁若落在無法埋設位置(如河道、危險陡坡)時，會另外埋設兩支「輔助樁」，兩支輔助樁的方向指向目標樁，目標樁與靠近目標樁的輔助樁的間距需另外紀錄。本題採用的雙矩偏心觀測即為如此模式，為實務上創新的作業模式。
考點命中	

解：

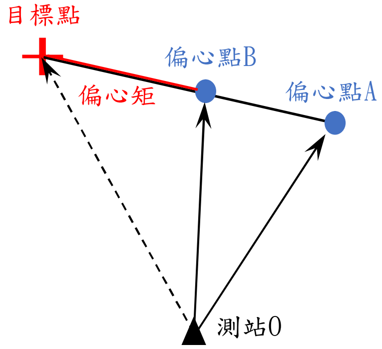
一、 說明:

地形測量時，常遇到目標點被遮蔽，或雖可觀測卻無法到達而無法架設稜鏡。故常採用偏心觀測，就可完成這類的觀測。偏心測量時，儀器照準的稜鏡點是一個輔助點(偏心點)，儀器記錄的不是輔助點，而是實際的目標點。因為稜鏡(觀測目標)一般不是立在目標點上，所以稱為偏心測量。

雙距偏心測量也用於目標點無法通視的測量。雙距偏心測量需要選擇兩個偏心點，並對這兩個偏心點進行觀測，其中需要輸入一個偏心距。要求所選兩個偏心點與目標點在一條直線上。先觀測最外邊的偏心點，再觀測中間的偏心點，輸入中間偏心點至目標點的距離。雙距偏心測量雖然增加了觀測量，但偏心點選擇比較靈活，且易於掌控，因而也時常應用。

二、 需要的觀測量

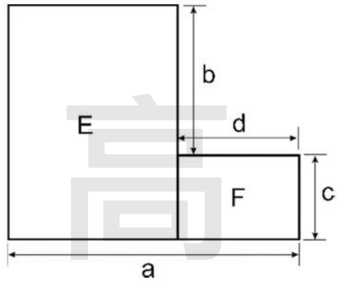
1. 觀測偏心點A之方位角與距離，求A之坐標。
2. 觀測偏心點B之方位角與距離，求B之坐標。
3. 紀錄B點至目標點之距離，即偏心矩S。



三、 計算過程

1. 由A、B計算直線向量
2. 由B往目標點延伸偏心矩S的距離，可得目標點坐標。

四、如圖所示，量測兩個長方形E和F的四個邊長，長度分別為a、b、c和d，其量測標準差分別為 3σ 、 2σ 、 σ 和 σ 。假設所有觀測量均獨立不相關，試計算這兩個長方形E和F面積的標準差及其相關係數。（25分）



試題評析	本題為誤差傳播的應用。相關的應用類型很多，應就誤差傳播的計算模式去瞭解方可套用於各種不同應用。另，要討論相關係數，必須採用廣義誤差傳播，因此必須將方程式調整成廣義誤差傳播的模式。
考點命中	Chap01測量概論Page.18廣義誤差傳播

解：

一、廣義誤差傳播的誤差方程式

$$f = Bx \rightarrow \Sigma_f = B\Sigma_x B^T$$

二、E和F的面積計算式

$$\begin{cases} \text{E=(a-d)}\cdot\text{(b+c)} \\ \text{F=c}\cdot\text{d} \end{cases}$$

改寫為泰勒展開式

$$\begin{cases} \Delta\text{E=E-E}_0\text{=(b+c)}\cdot\Delta a+\text{(a-d)}\cdot\Delta b+\text{(a-d)}\cdot\Delta c+\text{(-b-c)}\cdot\Delta d+... \\ \Delta\text{F=F-F}_0\text{=0}\cdot\Delta a+0\cdot\Delta b+\text{d}\cdot\Delta c+\text{c}\cdot\Delta d+... \end{cases} \text{近似值} \begin{cases} \text{E}_0\text{=(a-d)}\cdot\text{(b+c)} \\ \text{F}_0\text{=c}\cdot\text{d} \end{cases}$$

寫成矩陣形式

$$\begin{bmatrix} \Delta\text{E} \\ \Delta\text{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b+c) & (a-d) & (a-d) & -(b+c) \\ 0 & 0 & d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \\ \Delta d \end{bmatrix} \text{即 } f = Bx$$

其中 $f = \begin{bmatrix} \Delta\text{E} \\ \Delta\text{F} \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} (b+c) & (a-d) & (a-d) & -(b+c) \\ 0 & 0 & d & c \end{bmatrix}$ 、 $x = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \\ \Delta d \end{bmatrix}$

三、廣義誤差傳播計算

題目已告知:

1.a、b、c和d，其量測標準差分別為 3σ 、 2σ 、 σ 和 σ 。

即 $\sigma_a = 3\sigma$ ， $\sigma_b = 2\sigma$ ， $\sigma_c = \sigma$ ， $\sigma_d = \sigma$

2.假設所有觀測量均獨立不相關

即 $\sum_x=\begin{bmatrix}\sigma_a^2 & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} & \sigma_{ad}\\ \sigma_{ba} & \sigma_b^2 & \sigma_{bc} & \sigma_{bd}\\ \sigma_{ca} & \sigma_{cb} & \sigma_c^2 & \sigma_{cd}\\ \sigma_{da} & \sigma_{db} & \sigma_{dc} & \sigma_d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\sigma^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4\sigma^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2\end{bmatrix}$

依據廣義誤差傳播 $f=Bx\rightarrow\Sigma_f=B\Sigma_xB^T$

$$\sum_f=\begin{bmatrix}\sigma_{\Delta E}^2 & \sigma_{\Delta E\Delta F}\\ \sigma_{\Delta F\Delta E} & \sigma_{\Delta F}^2\end{bmatrix}=B\sum_x B^T$$

$$=\begin{bmatrix}(b+c) & (a-d) & (a-d) & -(b+c)\\ 0 & 0 & d & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\sigma^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4\sigma^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(b+c) & 0\\ (a-d) & 0\\ (a-d) & d\\ -(b+c) & c\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(b+c)9\sigma^2 & (a-d)4\sigma^2 & (a-d)\sigma^2 & -(b+c)\sigma^2\\ 0 & 0 & d\sigma^2 & c\sigma^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(b+c) & 0\\ (a-d) & 0\\ (a-d) & d\\ -(b+c) & c\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9(b+c)^2\sigma^2+4(a-d)^2\sigma^2+(a-d)^2\sigma^2+(b+c)^2\sigma^2 & (ad-d^2)\sigma^2-(bc+c^2)\sigma^2\\ (ad-d^2)\sigma^2-(bc+c^2)\sigma^2 & d^2\sigma^2+c^2\sigma^2\end{bmatrix}$$

其中

$$\sigma_{\Delta E}^2=9(b+c)^2\sigma^2+4(a-d)^2\sigma^2+(a-d)^2\sigma^2+(b+c)^2\sigma^2$$

$$\sigma_{\Delta F}^2=d^2\sigma^2+c^2\sigma^2$$

$$\sigma_{\Delta E\Delta F}=\sigma_{\Delta F\Delta E}=(ad-d^2)\sigma^2-(bc+c^2)\sigma^2$$

四、面積E、F的標準差即二者間相關係數

1. 面積E的標準差 $\sigma_{\Delta E}=\pm(\sqrt{9(b+c)^2+4(a-d)^2+(a-d)^2+(b+c)^2})\sigma$
2. 面積F的標準差 $\sigma_{\Delta F}=\pm(\sqrt{d^2+c^2})\sigma$
3. 二者之間的相關係數 $\sigma_{\Delta E\Delta F}=\sigma_{\Delta F\Delta E}=(ad-d^2)\sigma^2-(bc+c^2)\sigma^2$