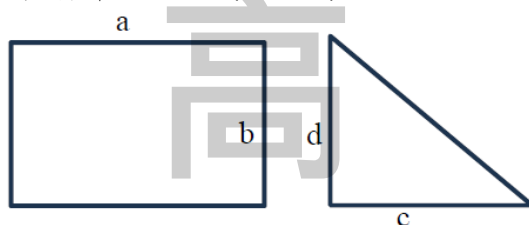


# 《測量學概要》

- 一、利用全站儀量測一矩形和一直角三角形土地（如下圖所示），矩形土地之長（a）和寬（b）邊長度分別為 $300.00 \pm 0.04$  m 和  $200.00 \pm 0.01$  m，三角形土地之股（c）和勾（d）邊長度分別為  $250.00 \pm 0.03$  m 和  $210.00 \pm 0.02$  m，且a、b、c、d 觀測量皆不相關。請計算矩形土地、直角三角形土地和兩土地相加之面積和其標準誤差？（25 分）



試題評析	送分題，保證錄取公務員。
考點命中	《高點土木測量學講義》第一回，歐陽編撰。

答：

(一)長方形面積  $A_1 = ab = (300)(200) = \underline{60000.00 \text{ m}^2}$

$$\frac{\partial A_1}{\partial a} = b$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial b} = a$$

$$\sigma_{A_1} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial A_1}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2} = \pm \sqrt{200^2 \times 0.04^2 + 300^2 \times 0.01^2} = \pm \sqrt{73} = \underline{\pm 8.54 \text{ m}}$$

三角形面積  $A_2 = 0.5cd = 0.5(250)(210) = \underline{26250.00 \text{ m}^2}$

$$\frac{\partial A_2}{\partial c} = 0.5d$$

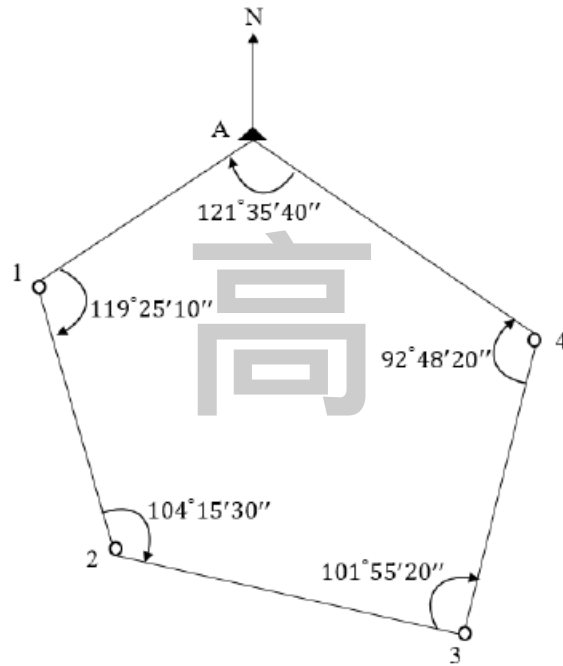
$$\frac{\partial A_2}{\partial d} = 0.5c$$

$$\sigma_{A_2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial A_2}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2} = \pm \sqrt{105^2 \times 0.03^2 + 125^2 \times 0.02^2} = \pm \sqrt{16.1725} = \underline{\pm 4.02 \text{ m}}$$

(二)相加之面積  $A = A_1 + A_2 = 60000 + 26250 = \underline{86250.00 \text{ m}^2}$

$$\text{相加面積之標準誤差 } \sigma_A = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial A_1}\right)^2 \sigma_{A_1}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial A_2}\right)^2 \sigma_{A_2}^2} = \pm \sqrt{1^2 \times 73 + 1^2 \times 16.1725} = \underline{\pm 9.43 \text{ m}}$$

- 二、閉合導線如下圖所示。已知點A到點4之方位角 $\phi_{A4} = 125^\circ 15' 30''$ ，圖中各內角觀測量均已完成閉合差改正，請計算各邊之方位角 $\phi_{4A}$ 、 $\phi_{A1}$ 、 $\phi_{12}$ 、 $\phi_{23}$ 及 $\phi_{34}$ ？（25 分）



試題評析	公務員資格大放送。重點是用偏角算，方位角以正數回答。為了避免算錯，建議 check。
考點命中	《高點土木測量學講義》第四回，歐陽編撰。

答：

$$\phi_{4A} = 180^\circ + \phi_{4A} = \underline{305^\circ 15' 30''}$$

$$\phi_{A1} = \phi_{A4} + 121^\circ 35' 40'' = \underline{246^\circ 51' 10''}$$

$$\phi_{12} = \phi_{A1} - (180^\circ - 119^\circ 25' 10'') = \underline{186^\circ 16' 20''}$$

$$\phi_{23} = \phi_{12} - (180^\circ - 104^\circ 15' 30'') = \underline{110^\circ 31' 50''}$$

$$\phi_{34} = \phi_{23} - (180^\circ - 101^\circ 55' 20'') = \underline{32^\circ 27' 10''}$$

$$\phi_{A4} = \phi_{34} - (180^\circ - 92^\circ 48' 20'') = -54^\circ 44' 30'' = \underline{305^\circ 15' 30''} \quad \text{check OK!}$$

三、工程實務上，當河道寬度超過100m時，建議採用對向水準測量，亦稱渡河水準測量。請說明對向水準測量施行步驟和高程差計算公式，並列出此法可消除或減低之誤差。（25 分）

試題評析	送分題，有背就有分，平常要練習畫圖，不然考場會卡住。
考點命中	《高點土木測量學講義》第二回，歐陽編撰。

答：

(一)對向水準測量 (reciprocal leveling)，亦稱渡河水準測量，可參考圖4-21，測線前進方向是從順水左岸到順水右岸。

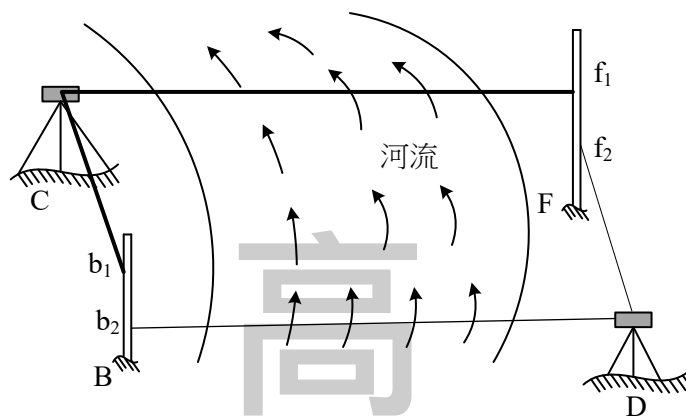


圖 4-21 【渡河水準測量的意思不是水準儀無法過河】

在河的兩側有 B、F 兩點欲測高程差，B 點為後視標尺所在處，F 點為前視標尺所在處，C、D 兩處則置兩台精度相同的水準儀。為了消除地球曲率差、大氣折光差、視準軸誤差，最好讓  $\overline{CF} = \overline{BD}$ ， $\overline{BC} = \overline{DF}$ ，因河寬特別寬之故， $\overline{BC}$  和  $\overline{DF}$  是長邊， $\overline{BD}$  和  $\overline{CF}$  是短邊，BCFD 大約形成平行四邊形，或視線交叉形成兩個相似之三角形，如圖 4-22。

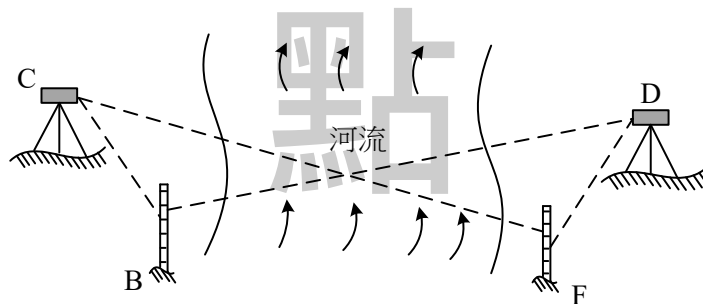


圖 4-22

假設水準儀到短邊標尺的「地球曲率差、大氣折光差、視準軸誤差三者總和」是  $\epsilon$ ，水準儀到長邊標尺的「地球曲率差、大氣折光差、視準軸誤差三者總和」是  $\Delta$ ，則水準儀 C 所測得的 B、F 高程差為  $\Delta H_{B \rightarrow F}^C = (b_1 - \epsilon) - (f_1 - \Delta) \dots\dots\dots ①$

水準儀 D 所測得的 B、F 高程差為  $\Delta H_{B \rightarrow F}^D = (b_2 - \Delta) - (f_2 - \epsilon) \dots\dots\dots ②$

$$(①+②)/2 \quad \text{得 B、F 高程差為 } \Delta H_{B \rightarrow F} = \frac{1}{2}[(b_1 + b_2) - (f_1 + f_2)] \quad [4.20]$$

對於遠方標尺，宜重複觀測取平均。若擔心 C、D 兩水準儀的視準軸誤差不一致，則可將 C、D 對調位置再測一次（標尺不動），前後兩次測出的高程差，加總取平均為最終高程差。

由於大氣折光差會隨時而變（上午中午下午氣溫不同，大氣密度不同，影響折射率），所以最好兩台儀器同時觀測。

如果只有一台水準儀，那這台水準儀就要「渡河」：第一次架在 C，觀察 B、F 標尺；第二次移站到 D，

再觀察 B、F 標尺。

此法仰賴水準儀必須能看清楚遠尺（河流對岸的尺）的刻度，故通常須加用覘板，由水準儀觀測者對準標尺之覘板，以對講機或手機通知對岸人員回報讀數。如果河流真的太寬，使用覘板也看不清楚時，對向水準測量也就測不下去。

(二)消除地球曲率差、大氣折光差、視準軸誤差

四、請列出並說明GPS 虛擬距離定位原理之觀測方程式，並說明有那些誤差。（25分）

試題評析	「水準全測、衛星誤差」，循歐陽所說軌跡，這四大金剛正好各出一題。
考點命中	《高點土木測量學講義》第六回，歐陽編撰。

答：  
(一)

衛星到接收儀（receiver）真實幾何距離為  $\rho = \sqrt{(X^s - X_r)^2 + (Y^s - Y_r)^2 + (Z^s - Z_r)^2}$  [10.1]

其中  $(X^s, Y^s, Z^s)$  是衛星的坐標， $(X_r, Y_r, Z_r)$  是接收儀的坐標。衛星在上方，所以 s 為上標；接收儀在下方，所以 r 為下標。這個真實幾何距離沒辦法「直接」得到。

距離觀測值（偽距） $p = \tilde{\rho} = \rho + d_p + c(dT_r - dT^s) + d_{ion} + d_{trop} + \epsilon_{mp} + \epsilon_p$  [10.2]

“~”符號可以想像成電磁波傳遞之意，電磁波實際上被折射才到接收儀，所以  $\tilde{\rho}$  是偽距，大於真實幾何距離  $\rho$ 。我們得到的是觀測值，觀測值內含真值，觀測值要經改正才得真值。

所謂衛星時錶誤差，就是衛星上的時鐘，應該要對準 GPS 標準時（GPST），卻沒有完全對準 GPS 標準時，而且每一顆衛星沒有對齊的誤差量，還不一樣。就好像你手上的機械錶或石英錶，並未完全對準中原標準時間，你手錶的誤差量跟鄰居手錶的誤差量還不一樣。

衛星時錶誤差量會影響測距精度，故要做衛星時錶改正。

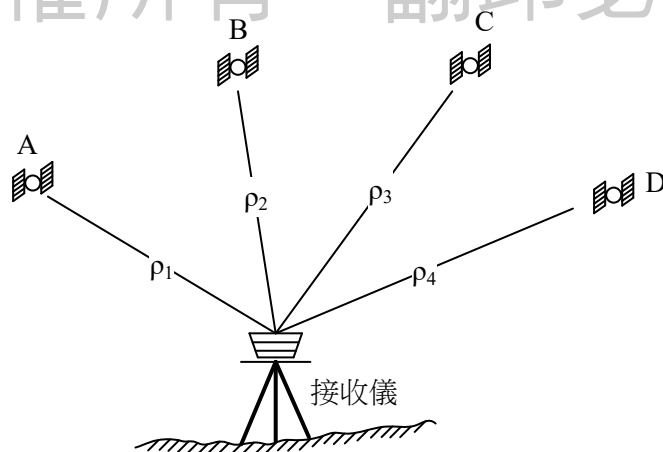


圖 10-5 衛星之 WGS 84 坐標由廣播星曆算得

圖 10-5 表示由廣播星曆得到四顆衛星之 WGS84 坐標  $A(X^A, Y^A, Z^A)$ 、 $B(X^B, Y^B, Z^B)$ 、 $C(X^C, Y^C, Z^C)$ 、 $D(X^D, Y^D, Z^D)$ 。符號  $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 、 $\tau_3$ 、 $\tau_4$  分別是傳播過程所消耗的時間， $c$  為電磁波波速， $\tilde{\rho}_1$ 、 $\tilde{\rho}_2$ 、 $\tilde{\rho}_3$ 、 $\tilde{\rho}_4$  分別是虛擬距離，接收儀坐標為  $(X_r, Y_r, Z_r)$ 。 $\omega$  為包含接收儀鐘差等等造成的距離差，則

$$(\tilde{\rho}_1 - \omega)^2 = (c\tau_1 - \omega)^2 = (X^A - X_r)^2 + (Y^A - Y_r)^2 + (Z^A - Z_r)^2$$

$$(\tilde{\rho}_2 - \omega)^2 = (c\tau_2 - \omega)^2 = (X^B - X_r)^2 + (Y^B - Y_r)^2 + (Z^B - Z_r)^2$$

$$(\tilde{\rho}_3 - \omega)^2 = (c\tau_3 - \omega)^2 = (X^C - X_r)^2 + (Y^C - Y_r)^2 + (Z^C - Z_r)^2$$

$$(\tilde{\rho}_4 - \omega)^2 = (c\tau_4 - \omega)^2 = (X^D - X_r)^2 + (Y^D - Y_r)^2 + (Z^D - Z_r)^2$$

聯立以上四式可解出接收儀坐標為  $(X_r, Y_r, Z_r)$  與  $\omega$ 。有了  $(X_r, Y_r, Z_r)$ ，可以再轉換成地理坐標  $(\phi, \lambda, h)$ 。注意地理坐標是先寫緯度，後寫經度。

$$(二) \text{真實幾何距離 } \rho_1 = \sqrt{(X^A - X_r)^2 + (Y^A - Y_r)^2 + (Z^A - Z_r)^2}$$

$$\text{虛擬距離觀似測值(偽距)} \quad \tilde{\rho}_1 = \rho_1 + d_p + c(dT_r - dT^s) + d_{ion} + d_{trop} + \varepsilon_{mp} + \varepsilon_p$$

$$= \sqrt{(X^A - X_r)^2 + (Y^A - Y_r)^2 + (Z^A - Z_r)^2} + d_p + c(dT_r - dT^s) + d_{ion} + d_{trop} + \varepsilon_{mp} + \varepsilon_p \quad [10.3]$$

= 真實距離 + 衛星軌道誤差 + 接收儀時錶誤差 - 衛星時錶誤差 + 電離層延遲誤差 + 對流層延遲誤差 + 多路徑效應  
誤差 + 接收儀聲噪干擾誤差

【虛擬距離 = 真實距離 + 誤差】

其中  $d_p$  是衛星軌道誤差， $c$  是電磁波波速

$dT_r$  是接收儀時錶相對於 GPS 標準時間，超前的偏移量

$dT^s$  是衛星時錶相對於 GPS 標準時間，超前的偏移量，時錶誤差都是系統誤差

$\delta t = dT_r - dT^s =$  兩個超前量的時間差

$d_{ion}$  是電離層 (ionosphere) 延遲誤差， $d_{trop}$  是對流層 (troposphere) 延遲誤差

$\varepsilon_{mp}$  是多路徑效應誤差 (multipath error)， $\varepsilon_p$  是接收儀聲噪干擾誤差 (receiver noise error)

接收儀附近若有頻率相近的干擾源，會干擾訊號接收，此為聲噪干擾，嚴重時無法定位。