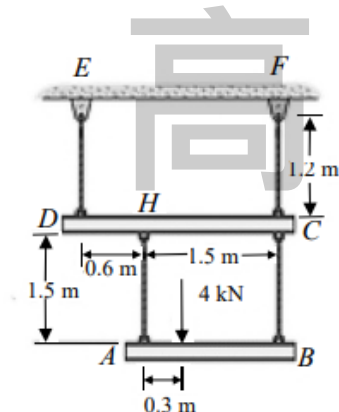


《材料力學》

- 一、如圖一所示，4 kN 的負載由四根 304 不銹鋼線支撐(楊氏模數 $E=193 \text{ GPa}$)，鋼線連接在剛性的構件 AB 及 CD 上。試求負載作用後各構件(構件 AB 及構件 CD) 的傾斜角度。構件起始是水平且各鋼線的截面積為 30 mm^2 。(25 分)



圖一

試題評析	算是本張考卷裡「相對」有陷阱考題，在計算AB構件傾斜角時要考慮上方CD構件之影響，其餘僅是簡單觀念罷了。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.1.13。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題2.1.12。

答：

1. 計算各鋼線內力與伸長量

先取出刚性構件AB並計算鋼線BC與鋼線AH之內力：

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow S_{BC} \times 1.5 = 4 \times 0.3 \Rightarrow S_{BC} = 0.8 \text{ kN (拉力)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_{AH} = 4 - S_{BC} = 4 - 0.8 = 3.2 \text{ kN (拉力)}$$

再取出刚性構件CD並計算鋼線DE與鋼線CF之內力：

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow S_{DE} \times 2.1 = S_{AH} \times 1.5 \Rightarrow S_{DE} = 2.286 \text{ kN (拉力)}$$

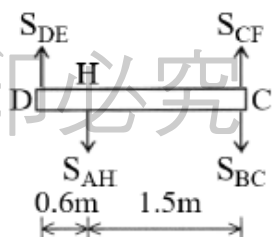
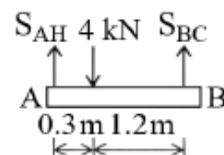
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_{CF} = S_{AH} + S_{BC} - S_{DE} = 1.714 \text{ kN (拉力)}$$

$$\text{鋼線AH伸長量 } \delta_{AH} = \frac{S_{AH} L_{AH}}{EA} = \frac{(3.2)(1.5 \times 10^3)}{(193)(30)} = 0.829 \text{ mm}$$

$$\text{鋼線BC伸長量 } \delta_{BC} = \frac{S_{BC} L_{BC}}{EA} = \frac{(0.8)(1.5 \times 10^3)}{(193)(30)} = 0.207 \text{ mm}$$

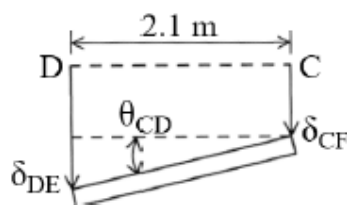
$$\text{鋼線CF伸長量 } \delta_{CF} = \frac{S_{CF} L_{CF}}{EA} = \frac{(1.714)(1.2 \times 10^3)}{(193)(30)} = 0.355 \text{ mm}$$

$$\text{鋼線DE伸長量 } \delta_{DE} = \frac{S_{DE} L_{DE}}{EA} = \frac{(2.286)(1.2 \times 10^3)}{(193)(30)} = 0.474 \text{ mm}$$



2. 計算構件AB及構件CD的傾斜角度

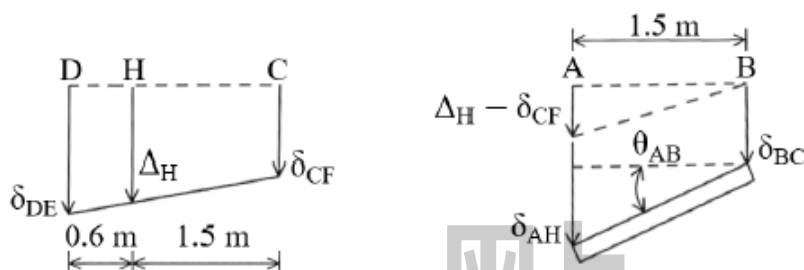
CF鋼線與DE鋼線上方為固定端，此時構件CD的傾斜角度直接將 δ_{CF} 與 δ_{DE} 畫出便可得到：



$$\text{構件CD傾斜角度 } \theta_{CD} = \frac{\delta_{DE} - \delta_{CF}}{L_{CD}} = \frac{0.474 - 0.355}{2.1 \times 10^{-3}} = 56.667 \mu \text{ rad}$$

接著計算構件AB的傾斜角度，特別注意的是構件AB上方並不是固定端，而是已經傾斜的構件CD，所以務必要考慮構件CD的變形。依據構件CD的剛體變形可算出H點的位移值：

$$\text{H點位移 } \Delta_H = 0.355 + \frac{(0.474 - 0.355)}{2.1} \times 1.5 = 0.440 \text{ mm}$$



最後將構件AB的變形圖繪出，進行傾斜角度計算：

$$\text{構件AB傾斜角度 } \theta_{AB} = \frac{(\Delta_H - \delta_{CF}) + \delta_{AH} - \delta_{BC}}{L_{AB}}$$

$$\Rightarrow \theta_{AB} = \frac{(0.440 - 0.355) + 0.829 - 0.207}{1.5 \times 10^{-3}} = 471.333 \mu \text{ rad}$$

二、考慮一薄壁圓筒壓力容器槽，其內徑 $r = 1 \text{ m}$ ，槽壁厚度 $t = 0.1 \text{ m}$ ，壓力容器槽內氣體壓力為 $p = 10 \text{ MPa}$ ，據此請求出該容器槽內壁所承受的最大剪應力的絕對值為何？（25 分）

試題評析	超級簡單的圓筒形薄壁壓力容器考題，公式沒記錯一定能得分！
考點命中	1. 《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題7.1.1。 2. 《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題7.1.2。

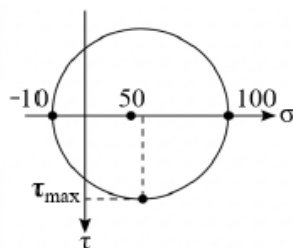
答：

$$\text{圓筒形壓力容器之環向應力 } \sigma_1 = \sigma_y = \frac{pr}{t} = \frac{(10)(1)}{0.1} = 100 \text{ MPa (拉應力)}$$

$$\text{圓筒形壓力容器之縱向應力 } \sigma_2 = \sigma_x = \frac{pr}{2t} = \frac{(10)(1)}{(2)(0.1)} = 50 \text{ MPa (拉應力)}$$

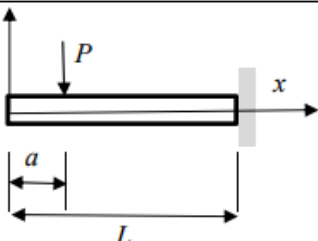
$$\text{內表面 } \sigma_3 = \sigma_z = -p = -10 \text{ MPa (壓應力)}$$

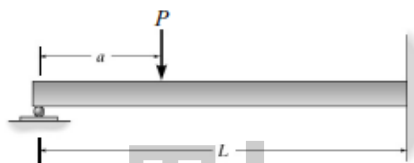
因為壁體內側有 σ_3 ，故壁體內側所受到的絕對最大剪應力要考慮三個方向，故絕對最大剪應力 $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = (100 + 10)/2 = 55 \text{ MPa}$ 。



三、如圖二所示，當梁上之最大正彎矩值與最大負彎矩值相同時，試問 a 值為何？已知梁之彈性模數 E 與斷面對中性面之慣性矩 I 均為常數。已知彎矩 $M(x)$ 與撓度（或稱側向位移） $v(x)$ 、斜度 $\theta(x)$ 存在 $M(x)=EIv''(x)$ 、 $\theta(x)=\frac{dv(x)}{dx}$ 。並且以下表格中懸臂梁在距離自由端 $x=a$ 處受到集中荷重 P 的彈性位移曲線為已知，使用線性疊加原理求解。（ $\sqrt{2}=1.41421$ ）（25分）

參考表格

梁	撓度
	$v(x) = \frac{P}{6EI} [3(L-a)^2x - 3a(L-a)^2 - 2(L-a)^3] \quad 0 \leq x \leq a$ $v(x) = \frac{P}{6EI} [(L-x)^3 - 3(L-a)(L-x)^2] \quad a \leq x \leq L$



圖二

試題評析	同113年地特三等考題，只要能明白所給公式含意便能求解，再進行運算就能得到答案。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.3.11。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題5.3.4。

答：

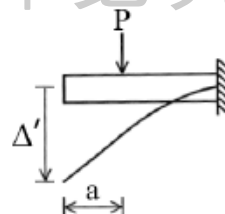
1. 計算左側滾支承反力 R

題目中所給 a 表示「力量到座標原點之位置」、 x 則代表「欲求點位置」，另外需特別提醒的是題目撓度公式所給之 P 以「向下為正」而「向上為負」，這些是代入公式時應注意事項。本題為一次靜不定，拆解成有 P 力與滾支承反力 R 作用在原結構，先求僅有 P 力作用時之位移 Δ' ，令 $a=a$ 、 $x=0$ 、 $P=P$ ：

$$\Delta' = \frac{P}{6EI} [-3a(L-a)^2 - 2(L-a)^3] = \frac{P}{6EI} (L-a)^2 (-2L-a) \quad (1)$$

再來求僅有 R 力作用時之位移 Δ'' ，令 $a=x=0$ 、 $P=-R$ ：

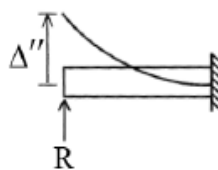
$$\Delta'' = \frac{-R}{6EI} [-2(L)^3] = \frac{RL^3}{3EI} \quad (1)$$



滾支承處無初始位移故其撓度值為零，令 $\Delta = \Delta' + \Delta'' = 0$ 可得反力 R ：

$$\Rightarrow \Delta = \Delta' + \Delta'' = 0 \Rightarrow \frac{P}{6EI}(L-a)^2(-2L-a) + \frac{RL^3}{3EI} = 0$$

$$\Rightarrow \text{反力 } R = \frac{P}{2L^3}(L-a)^2(2L+a) \quad (\uparrow)$$



2. 計算梁上最大正彎矩與最大負彎矩相同時之 a 值

最大正彎矩會出現在 $x = a$ 處(P 值作用位置)， $+M_{\max} = Ra$ ；而最大負彎矩會

出現在 $x = L$ 處(固定端位置)， $-M_{\max} = P(L-a) - RL$ ，令 $+M_{\max} = -M_{\max}$ ：

$$\Rightarrow +M_{\max} = -M_{\max} \Rightarrow Ra = P(L-a) - RL \Rightarrow R(L+a) = P(L-a)，將已得之 R 代回$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2L^3}(L-a)^2(2L+a)(L+a) = P(L-a) \Rightarrow \frac{(L-a)(2L+a)(L+a)}{2L^3} = 1$$

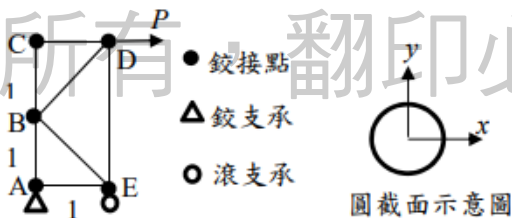
$$\Rightarrow (L^2 - a^2)(2L+a) = 2L^3 \Rightarrow a^2 + 2La - L^2 = 0，接著採用一元二次方程式公式解$$

$$\Rightarrow a = \frac{-2L \pm \sqrt{(2L)^2 - 4 \times 1 \times (-L^2)}}{2 \times 1} = -L \pm \sqrt{2}L \quad (\text{負不合})$$

$$\text{因此 } a = -L + \sqrt{2}L = (-1 + 1.41421)L = 0.41421L$$

四、如圖三所示，有一桁架系統由桿件透過鉸接組合而成。已知所有桿件均為A46 合金鋼所製作的圓桿，其降伏強度 250 MPa、彈性模數為 200 GPa，桿件的截面積均為 0.03 m^2 ，且該圓桿截面上的慣性矩 $I_x = I_y = \frac{1}{4}r^4$ ， r 為截面圓的半徑。又 AB、BC、AE、CD 桿件長度為 1 m，DE 桿件長度為 2 m。已知兩端鉸接之桿件其挫屈(buckling)的臨界載重可以表達為 $P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2}$ ，若同時考量挫屈及降伏均為失敗，請問此時桁架系統所受的水平力 P 最大可為多少？($\pi = 3.14159$ 、 $\sqrt{2} = 1.41421$) (25 分)

【版權所有，翻印必究】



圖三

試題評析	萬年考古題之一，簡單桁架要同時考慮降伏與挫屈失敗，不要算錯內力一定能得分；另外題目給的慣性矩公式有誤，不可直接代入。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題9.3.13。 2.《材料力學》，高點文化出版，程中鼎編著，例題9.3.7。

答：

1. 計算各桿件軸力

先看整體桁架系統計算支承處反力：

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_E \times 1 = P \times 2 \Rightarrow E \text{ 點垂直反力 } R_E = 2P(\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A \text{ 點水平反力 } R_{Ax} = P(\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A \text{ 點垂直反力 } R_{Ay} = R_E = 2P(\downarrow)$$

拆出節點A計算AE桿與AB桿內力：

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow AE \text{ 桿內力 } S_{AE} = R_{Ax} = P(\text{拉力})$$

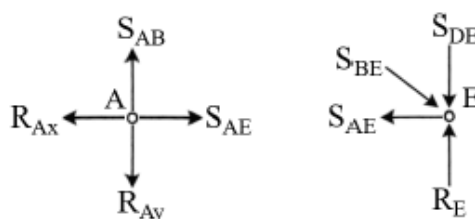
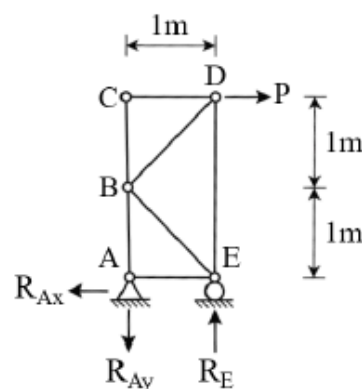
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow AB \text{ 桿內力 } S_{AB} = R_{Ay} = 2P(\text{拉力})$$

拆出節點E計算BE桿與DE桿內力：

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow BE \text{ 桿內力 } S_{BE} = \sqrt{2}S_{AE} = \sqrt{2}P(\text{壓力})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow DE \text{ 桿內力 } S_{DE} = R_E - S_{BE} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = P(\text{壓力})$$

另外依據力平衡觀念，可得BC桿件及CD桿件皆為零力桿件 $S_{BC} = S_{CD} = 0$ ；且單獨取出D點可得BD桿內力 $S_{BD} = \sqrt{2}P(\text{拉力})$ 。



2. 同時考量挫屈及降伏失敗，計算水平力最大P值

先討論挫屈失敗，只有承受壓力的桿件會挫屈；本題未給圓桿半徑故先計算：

$$A = 0.03 \text{ m}^2 = \pi r^2 \Rightarrow \text{半徑 } r = 0.0977 \text{ m}$$

原題目給的圓形斷面慣性矩 $I_x = I_y = r^4/4$ 應是少打一個 π ，不可直接代入會是錯

的！正確寫法是 $I_x = I_y = \pi r^4/4 = (\pi)(0.0977^4)/4 = 71.560 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ 。計算壓力桿件

BE恰達挫屈失敗時之作用力 P_1 ：

$$\Rightarrow (P_{cr, BE} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)_{BC}^2}) = S_{BE} \Rightarrow \frac{(\pi^2)(200 \times 10^9)(71.560 \times 10^{-6})}{(1.0 \times \sqrt{2})^2} = \sqrt{2}P_1$$

$$\Rightarrow P_1 = 49940 \times 10^3 \text{ N} = 49940 \text{ kN}$$

計算壓力桿件DE恰達挫屈失敗時之作用力 P_2 ：

$$\Rightarrow (P_{cr, DE} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)_{DE}^2}) = S_{DE} \Rightarrow \frac{(\pi^2)(200 \times 10^9)(71.560 \times 10^{-6})}{(1.0 \times 2)^2} = P_2$$

$$\Rightarrow P_2 = 35313 \times 10^3 \text{ N} = 35313 \text{ kN}$$

再討論降伏失敗，所有桿件內力(包含壓力與拉力)的最大值為AB桿內力 $S_{AB} = 2P$ ，故計算其恰達降伏失敗時之作用力 P_3 ：

$$\Rightarrow \sigma_{AB} = \sigma_y \Rightarrow \frac{2P_3}{0.03} = 250 \times 10^6 \Rightarrow P_3 = 3750 \times 10^3 \text{ N} = 3750 \text{ kN}$$

綜上在同時考量挫屈及降伏失敗，水平力最大P值 $= \min(P_1, P_2, P_3) = \underline{3750 \text{ kN}}$ 。

高

點

【版權所有，翻印必究】