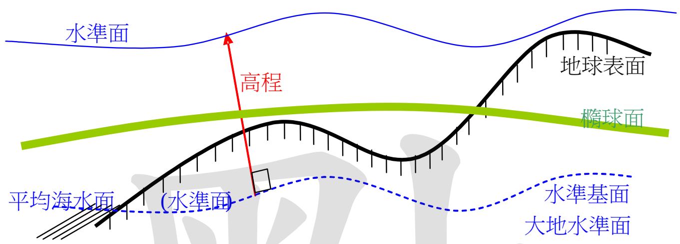
《測量學概要》

一、在高程測量中常用到地球表面、大地水準面及橢球面，請解釋三者之意義及其特性，並說明此三面與高程之關係。(20分)

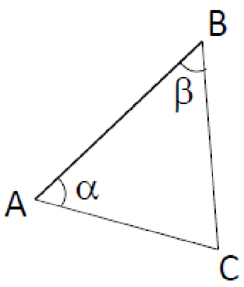
試題評析	高程，在水準測量與衛星定位測量有不同的需求及定義，也與真實地表有所差異。可於水準測量之章節中得到說明。
考點命中	《高點土木測量學講義》Chap03-水準測量之P01

解：

1. 地球表面:所指為肉眼可見且可碰觸的地表，為各種物質受力平衡之呈現。
2. 大地水準面: 預先測定之水準面，不可見、不可碰觸，此面上高程為零。最吻合於平均海水面之地球重力場等位面，不規則曲面。亦為水準測量的高程起算基準。水準測量所獲得的高程，稱為正高。
3. 橢球面:是一個數學上定義的地球表面，不可見、不可碰觸，它近似於大地水準面。是大地控制網計算和顯示點坐標（如緯度，經度和海拔）的首選的地球表面的幾何模型。通常所說地球的形狀和大小，實際上就是以參考橢球的長半軸、短半軸和扁率來表示的。由參考橢球面起算的高程，稱為橢球高或力高。衛星定位測量所獲得之高程值，即為橢球高。
4. 地球表面同一點位上的正高與力高差異，即稱為大地起伏值。



二、有一三角形如圖所示，其中 AB 為已知點，假設點位沒有誤差，其 EN 坐標分別為 A（1000.00 m，800.00 m）、B（1250.00 m，1100.00 m），觀測得夾角及中誤差為$\angle\alpha=53°18'24''\pm20''$，$\angle\beta=49°38'46''\pm20''$，請計算 AC 邊長及其中誤差。（20分）



試題評析	本題為很標準的正算(方位角與距離求坐標差)題型，另外加入誤差傳播計算C點坐標精度。
考點命中	《高點土木測量學講義》Chap05-坐標系統-P04.

解：

由A點求C點坐標，公式為: $\begin{cases} E_C = E_A + \Delta E_{AC} = E_A + D_{AC} \cdot \sin Azi_{\overline{AC}} \\ N_C = N_A + \Delta N_{AC} = N_A + D_{AC} \cdot \cos Azi_{\overline{AC}} \end{cases}$

AB=√(ΔE²+ΔN²)=390.513m

設C角為γ=180−α−β=180−53°18’24”−49°38’46”=77°02’46”

求方位角AziAB:

$$\mathrm{Az}i_{AB} = \tan^{-1}(\frac{\Delta E_{\mathrm{AB}}}{\Delta N_{\mathrm{AB}}}) = \tan^{-1}(\frac{250}{300}) = 39°48'20''$$

求方位角AziAC:

$$\mathrm{Az}i_{\mathrm{AC}} = \mathrm{Az}i_{AB} + \alpha = 39°48'20'' + 53°18'24'' = 93°06'44''$$

求距離AC:

$$\text{正弦公式}\ \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\gamma)} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin(\beta)} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin(\alpha)} = \frac{390.513}{\sin(77^o 02'46'')} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin(49^o 38'46'')}$$

AC=305.364m

計算C點坐標

$$\begin{cases} E_C = E_A + D_{AC} \cdot \sin Azi_{\overline{AC}} \\ N_C = N_A + D_{AC} \cdot \cos Azi_{\overline{AC}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_C = 1000 + 305.364 \cdot \sin(93^o 06'44'') \\ N_C = 800 + 305.364 \cdot \cos(93^o 06'44'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_C = 1304.913 \\ N_C = 783.421 \end{cases}$$

依據誤差傳播，先求距離AC之精度

$$\text{由正弦公式}\ \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\gamma)} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin(\beta)}\text{，故}\ \mathrm{AC} = AB\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

$$\rightarrow\text{偏微分}\ \mathrm{AC} = \mathrm{AC}_0 + \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \cdot dAB + \frac{\mathrm{AB} \cdot \cos(\beta)}{\sin(\gamma)} \cdot \frac{d\beta}{\rho''} + \frac{-\mathrm{AB} \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma)}{\sin^2(\gamma)} \cdot \frac{d\gamma}{\rho''}$$

→誤差傳播(AB為已知邊，無誤差)

$$\mathrm{M}_{\mathrm{AC}}^2 = (\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)})^2 \cdot \mathrm{M}_{dAB}^2 + (\frac{\mathrm{AB} \cdot \cos(\beta)}{\sin(\gamma)})^2 \cdot (\frac{M_{d\beta}}{\rho''})^2 + (\frac{-\mathrm{AB} \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma)}{\sin^2(\gamma)})^2 \cdot (\frac{M_{d\gamma}}{\rho''})^2$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{AC}} = \pm 0.026\mathrm{m}$$

依據誤差傳播，計算C點精度

→偏微分 $\begin{cases} E_C = E_{C0} + dE_C = E_{C0} + dE_A + \sin Azi_{\overline{AC}} \cdot dD_{AC} + D_{AC} \cdot \cos Azi_{\overline{AC}} \cdot \dfrac{dAzi_{\overline{AC}}}{\rho''} \\ N_C = N_{C0} + dN_C = N_{C0} + dN_A + \cos Azi_{\overline{AC}} \cdot dD_{AC} + D_{AC} \cdot (-\sin Azi_{\overline{AC}}) \cdot \dfrac{dAzi_{\overline{AC}}}{\rho''} \end{cases}$

$$\begin{cases} dE_C = dE_A + \sin Azi_{\overline{AC}} \cdot dD_{AC} + D_{AC} \cdot \cos Azi_{\overline{AC}} \cdot \dfrac{dAzi_{\overline{AC}}}{\rho''} \\ dN_C = dN_A + \cos Azi_{\overline{AC}} \cdot dD_{AC} + D_{AC} \cdot (-\sin Azi_{\overline{AC}}) \cdot \dfrac{dAzi_{\overline{AC}}}{\rho''} \end{cases}$$

→誤差傳播 $\begin{cases} M_{E_C}^2 = M_{E_A}^2 + (\sin Azi_{\overline{AC}})^2 \cdot M_{D_{AC}}^2 + (D_{AC} \cdot \cos Azi_{\overline{AC}})^2 \cdot (\dfrac{M_{Azi_{AC}}}{\rho''})^2 \\ M_{N_C}^2 = M_{N_A}^2 + (\cos Azi_{\overline{AC}})^2 \cdot M_{D_{AC}}^2 + (D_{AC} \cdot (-\sin Azi_{\overline{AC}}))^2 \cdot (\dfrac{M_{Azi_{AC}}}{\rho''})^2 \end{cases}$

本題假設A點坐標無誤差

$$\begin{cases} M_{E_C}^2 = (\sin Azi_{\overline{AC}})^2 \cdot M_{D_{AC}}^2 + (D_{AC} \cdot \cos Azi_{\overline{AC}})^2 \cdot (\dfrac{M_{Azi_{AC}}}{\rho''})^2 \\ M_{N_C}^2 = (\cos Azi_{\overline{AC}})^2 \cdot M_{D_{AC}}^2 + (D_{AC} \cdot (-\sin Azi_{\overline{AC}}))^2 \cdot (\dfrac{M_{Azi_{AC}}}{\rho''})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{E_C} = \pm 0.026m \\ M_{N_C} = \pm 0.030m \end{cases}$$

三、已知A點高程為15.372 m，現於A點整置天頂距式垂直度盤之經緯儀觀測B點之標尺，儀器高為1.520 m，第一次觀測得標尺讀數為2.362 m，天頂距正鏡讀數為81°57'10"，倒鏡讀數為278°03'10"，第二次觀測得標尺讀數為0.835 m，天頂距正鏡讀數為83°28'40"，倒鏡讀數為276°31'40"，請問AB水平距離為何？B點高程值？（20分）

試題評析	本題為三角高程的雙高法。為多年來第一次出現的考題。 另外，垂直角讀數，需進行指標差改正
考點命中	《高點土木測量學講義》Chap03水準測量之P15，Ch04角度測量之P04

解：

1.指標差改正

指標差 $i = \dfrac{(正+倒)-360}{2}$

改正數 $v = -i$ (改正後讀數=改正前讀數+v)

第一次讀數

$$i = \frac{(81^o57'10''+287^o03'10'')-360^o}{2} = +10''$$

改正後天頂距=$81^o57'10''-10''=81^o57'00''$

換算仰角 $\beta = 8^o 03'00''$

V2=2.362

第二次讀數

$$i = \frac{(83^o 28'40''+276^o 31'40'')-360^o}{2} = +10''$$

改正後天頂距=$83^o 28'40''-10'' = 83^o 28'30''$

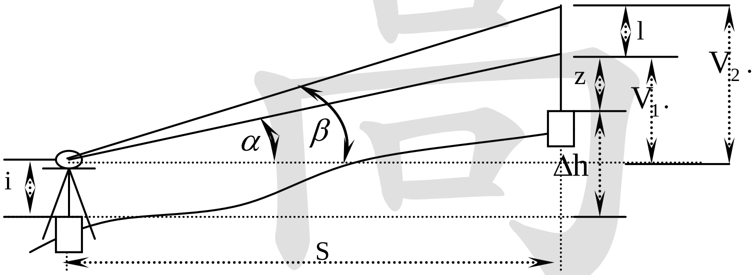
換算仰角 $\alpha = 6^o 31'30''$

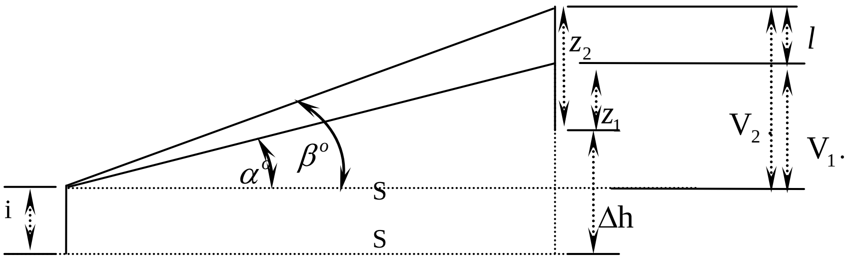
V1=0.835

2.雙高法

依據題目敘述，可繪製以下略圖。

儀器高i=1.520





$$V_1 = S\tan\alpha$$

公式 $V_2 = S\tan\beta$

$$l = V_2 - V_1 = S(\tan\beta - \tan\alpha)$$

and

$$S = \frac{l}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

$$\Delta h = V_1 + i - z = V_2 + i - l - z$$

$$h_B = h_A + \Delta h$$

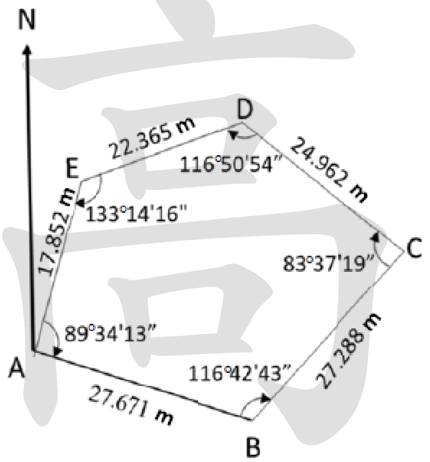
可解算

水平距 $S = \dfrac{l}{\tan\beta - \tan\alpha}$ =56.444m

$\Delta h = V_1 + i - z = V_2 + i - l - z$ =7.141

$h_B = h_A + \Delta h$ =22.513m

四、有一導線如圖所示，已知 AB 邊之方位角為 $\varphi_{AB}=107°06'10"$，觀測得內角分別為 $\angle A=89°34'13"$、$\angle B=116°42'43"$、$\angle C=83°37'19"$、$\angle D=116°50'54"$、$\angle E=133°14'16"$，距離分別為 AB＝27.671 m、BC＝27.288 m、CD＝24.962 m、DE＝22.365 m、EA＝17.852 m，請計算該閉合導線之導線精度（導線閉合比數）。（20分）



試題評析	本題為導線測量之部分計算，須完整執行導線計算之流程才可解算本題。
考點命中	《高點土木測量學講義》Ch07導線測量之P05

解：

1. 先進行角度平差

n 多邊形內角總和 $[\alpha]=(n-2)\cdot 180^0$，閉合差 $f_w=[\alpha]-(n-2)\cdot 180^0$。

若閉合差在容許誤差範圍內，各角度誤差視為相等，各角改正值 $v=-\frac{f_w}{n}$

∠A	89	34	13
∠B	116	42	43
∠C	83	37	19
∠D	116	50	54
∠E	133	14	16
總和	537	177	145
	539	59	25
內角應為	540		

角度閉合差-35”，每角改正數7”

改正角度後之各角如下

∠A	89	34	20
∠B	116	42	50
∠C	83	37	26
∠D	116	50	61
∠E	133	14	23

各邊長之方位角推算

(閉合導線順鐘向編點號)由內角計算方位角：$\varphi_{n-1,n}-\alpha_n \pm 180^0=\varphi_{n,n+1}$

方位角	AB	107	6	10
方位角	BC	43	49	0
方位角	CD	307	26	26
方位角	DE	244	17	27
方位角	EA	197	31	50
方位角	AB	107	6	10

依據方位角與距離，計算各邊長之縱橫坐標差、水平與垂直閉合差

$$\text{橫距}=\Delta X=D_{AB}\cdot\sin\varphi_{AB}$$

$$\text{縱距}=\Delta Y=D_{AB}\cdot\cos\varphi_{AB}$$

	方位角	距離	縱坐標差	橫坐標差
AB	107-6-10	27.671	26.447	-8.138
BC	43-49-0	27.288	18.893	19.690
CD	307-26-26	24.962	-19.819	15.175
DE	244-17-27	22.365	-20.151	-9.702
EA	197-31-50	17.852	-5.377	-17.023
	測距總長	120.138	垂直閉合差	水平閉合差
			Wy=-0.007	Wx=0.003

依據水平與垂直閉合差，計算位置閉合差$W_L=\sqrt{W_X^2+W_Y^2}$ =0.008

施測距離總長L=120.138

本導線測量精度(閉合比)= $\dfrac{W_L}{L}=\dfrac{0.008}{120.138}=\dfrac{1}{X}$ ，X=15140

即本導線精度達15000分之一

五、全球導航衛星系統（Global Navigation Satellite System, GNSS）之應用越來越廣泛，其中計算衛星至接收器間之距離為重要之關鍵，請列出在接收器端計算導航衛星至接收器間之距離有那些方法？並詳細說明其原理及應用。（20分）

試題評析	本題為衛星定位系統之原理及其應用說明。
考點命中	《高點土木測量學講義》Chzp10全球衛星定位系統之P03

解：

計算衛星到接收計之間的距離，有兩種方法，說明如下:

1 GPS距離量測種類

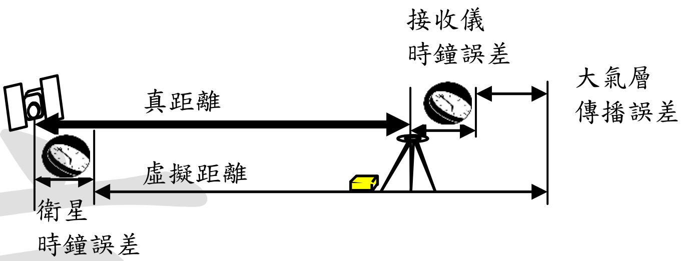
GPS量測接收儀與衛星間瞬間距離

1. 虛擬距離觀測：$\rho=c\cdot\tau$（c：大氣中光速；τ：時間偏移）

2. 載波相位觀測：$\varphi(t)=\varphi_s(T)-\varphi_r(t)$（$\varphi_s(T)$:T時衛星發射之相位 $\varphi_r(t)$:t時接收儀接收之相位）

2 虛擬距離觀測

$$\rho_i = R + c\cdot(dt - dT) + dtrop + dion_i + \varepsilon\rho_i$$



ρ_i：量測所得虛擬距離(公尺)

R：衛星到接收儀間真實距離(公尺)

c：真空中光速(公尺/秒)

dt：接收儀時鐘誤差(秒)

dT：衛星時鐘誤差(秒)

$dtrop$：對流層延遲誤差(公尺)

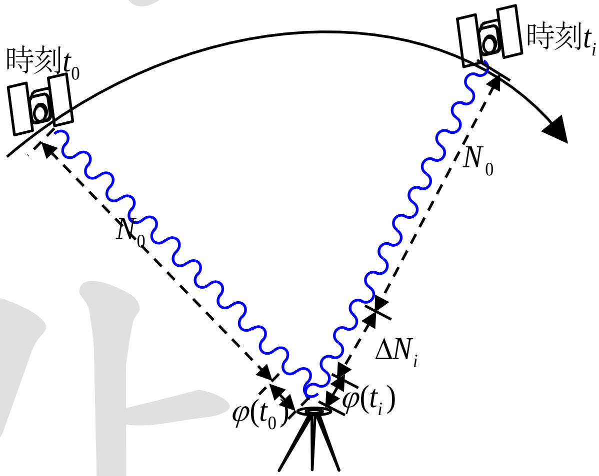
$dion_i$：電離層延遲誤差(公尺)

$\varepsilon\rho_i$：虛擬距離觀測量之雜訊及多路徑效應(公尺)

多應用於單點定位，精度較低，很難優於1m。如車用導航、手機定位。

3 載波相位觀測

1. $L_i^j = R_i^j + c\cdot(dt_i - dT^j) + dtrop_i^j + dion_i^j + \lambda_k\cdot N_i^j + \varepsilon L_i^j$ (上標：衛星編號. 下標：接收器編號)



L_i^j：量測所得相位觀測量(公尺)

R：衛星到接收儀間真實距離(公尺)

c：真空中光速(公尺/秒)

dt：接收儀時鐘誤差(秒)

dT：衛星時鐘誤差(秒)

$dtrop$：對流層延遲誤差(公尺)

$dion_i$：電離層延遲誤差(公尺)

λ_k：載波之波長(公尺)

N_i^j：相位未定值(cycles)

εL_i^j：相位觀測量之雜訊及多路徑效應(公尺)

相位量測精度為訊號波長1%, 則可達公釐級精度

多應用於高精度定位，如工程測量。原因是可透過差分計算提高定位精度。