

《統計學概要》

註：I. 對應右尾機率值 α 的標準常態分配臨界值 z_α ：

$$z_{0.05}=1.645; z_{0.025}=1.96; z_{0.35}=0.385; z_{0.55}=-0.126$$

II. 對應自由度 df 且右尾機率值 α 的 t 分配臨界值 $t_\alpha(df)$ ：

$$t_{0.025}(3)=3.182; t_{0.05}(3)=2.353; t_{0.025}(4)=2.776; t_{0.05}(4)=2.132;$$

$$t_{0.025}(6)=2.447; t_{0.05}(6)=1.943; t_{0.025}(7)=2.365; t_{0.05}(7)=1.895;$$

所有假設檢定問題，皆需正確寫出虛無假設、對立假設、檢定統計量、拒絕域、檢定結果與結論。

一、已知12個燈泡中有5個瑕疵，任取4個來檢驗。

(一)若取後不放回，請計算至少一個有瑕疵之機率。(5分)

(二)若取後放回，請計算沒有瑕疵之機率。(5分)

(三)請計算並比較取後放回及不放回，瑕疵個數的變異數有何不同。(10分)

試題評析	本題涉及二項分配與超幾何分配之機率計算與變異數比較，難度不高，只要考生有學習過兩個機率分配之異同處，應該可以獲得滿分。
考點命中	《高點·高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第六章第三節。

答：

(一) 令 X 表不良品之件數(抽後不放回)

$$X \sim \text{Hyper}(N=12, m=5, n=4)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} = 0.9293$$

(二) 令 Y 表不良品之件數(抽後放回)

$$Y \sim \text{Bin}(n=4, p=\frac{5}{12})$$

$$P(Y=0) = \binom{4}{0} \left(\frac{5}{12}\right)^0 \left(\frac{7}{12}\right)^{4-0} = 0.1158$$

$$(三) V(X) = 4\left(\frac{5}{12}\right)\left(1-\frac{5}{12}\right)\left(\frac{12-4}{12-1}\right) = 0.7071$$

$$V(Y) = 4\left(\frac{5}{12}\right)\left(1-\frac{5}{12}\right) = 0.9722$$

可得 $V(X) > V(Y)$

【版權所有，重製必究！】

二、快速檢驗 (Rapid Test) 經常被用來判斷某人是否有 HIV (造成 AIDS 的病毒)。偽陽性與偽陰性發生的機率分別是 0.03 和 0.08。一位醫師剛收到一份快速檢驗報告，病患檢測的結果呈現陽性。在收到此報告之前，這位醫師將這位病患歸類在低危險群，其為 HIV 帶原的機率只有 0.6%。

(一) 這位病患實際有 HIV 的機率為何？(10分)

(二) 假設病患檢查結果是陰性，實際上是陽性的機率為何？(5分)

試題評析	本題涉及貝氏定理之基礎題型，考古題當中常有，考生只要勤練考古題應該可以獲得滿分。
考點命中	《高點·高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第四章第四節。

答：

令 A 表實際上有 H I V
B 表檢查結果有 H I V

$$(一) P(A|B) = \frac{0.006 \times 0.92}{0.006 \times 0.92 + 0.994 \times 0.03} = 0.1562$$

$$(二) P(A|B^c) = \frac{0.006 \times 0.08}{0.006 \times 0.08 + 0.994 \times 0.97} = 0.0004976$$

三、某保險理賠公司接獲申請理賠電話的間隔時間(單位：分鐘)為指數分配：

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3}, x \geq 0$$

(一) 請問接獲申請理賠電話的平均間隔時間是多少？(5分)

(二) 等待下一通申請理賠電話的時間大於30秒的機率為何？(5分)

(三) 請用卜瓦松分配計算5分鐘內都沒有來電申請理賠的機率為何？(10分)

試題評析	本題涉及Poisson與指數分配之計算題型，課堂上老師都一直提醒同學要注意兩個分配間之關係，有充足準備的考生應該可以獲得滿分。
考點命中	《高點·高上統計學講義》第二回，趙治勳編撰，第七章第二節。

答：

令 X 表接獲申請理賠電話之間隔時間(單位時間：分鐘)

$$X \sim Exp(\lambda = \frac{1}{3})$$

$$(一) E(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ (分鐘)}$$

$$(二) P(X > \frac{1}{2}) = e^{-\frac{11}{32}} = 0.8465$$

(三) 令 N(t) 表在 t 倍一分鐘內接獲申請理賠之電話數量

$$N(t) \sim Poisson(\lambda = \frac{1}{3})$$

$$P(N(t=5) = 0) = \frac{e^{-\frac{1}{3} \times 5} (\frac{1}{3} \times 5)^0}{0!} = 0.1889$$

【版權所有，重製必究！】

四、治療師想了解，聽音樂是否能讓患有憂鬱症的病患降低其憂鬱指數，於是抽選了7位病患，分別測他們聽音樂前及聽音樂後的憂鬱指數，資料如下：

病患	1	2	3	4	5	6	7
聽音樂前	52	56	52	41	45	50	49
聽音樂後	47	51	45	38	43	46	42

- (一)請問病患聽音樂前後的平均憂鬱指數差異(後-前)約為何?(5分)
 (二)在0.05的顯著水準,利用臨界值法檢定是否聽音樂後會降低憂鬱指數?(15分)

答:

令 X, Y 分別表聽音樂前與聽音樂後之憂鬱指數

設 $D = Y - X$

(一) $\bar{d} = -4.7143$

(二) $H_0: \mu_Y \geq \mu_X$ vs $H_1: \mu_Y < \mu_X$

等同於 $H_0: \mu_D \geq 0$ vs $H_1: \mu_D < 0$

$$T.S.: T = \frac{\bar{D} - 0}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{(7-1=6)}$$

R.R.: Reject H_0 at $\alpha = 0.05$ if $T^* < -t_{0.05(6)} = -1.943$

$$\therefore T^* = \frac{-4.7143 - 0}{1.8898 / \sqrt{7}} = -6.6 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

結論: 我們有足夠證據去推論聽音樂之後會降低憂鬱指數。

五、2017年某款750ml紅酒的拍賣價格及酒齡資料如下表:

酒齡(年)	36	20	29	30	34
價格(\$)	245	142	212	209	237

- (一)試用最小平方估計法(least squares estimation)建立一估計迴歸方程式,來描述酒齡對拍賣價格的影響。(10分)
 (二)在0.05的顯著水準下檢定此迴歸線是否顯著。(10分)
 (三)使用此估計迴歸方程式預測25年酒齡的紅酒其拍賣價格。(5分)

試題評析 本題涉及簡迴歸的計算題,考古題中已經出現過很多次,大部份考生應該能夠獲得滿分。

考點命中 《迴歸分析熱門題庫》,高點文化出版,趙治勳編著,第二章。

答:

假設模型: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$SS_X = 4593 - \frac{(194)^2}{5} = 152.8, \quad SS_Y = 224983 - \frac{(1045)^2}{5} = 6578,$$

$$SS_{XY} = 32136 - \frac{(149)(1045)}{5} = 995$$

$$(一) \hat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = 6.5118 \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 14.9484$$

$$\therefore \hat{y} = 14.9484 + 6.5118x$$

$$(二) H_0: \beta_1 = 0 \text{ vs } H_1: \beta_1 \neq 0$$

$$\text{T.S.: } T = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\frac{MSE}{SS_X}}} \sim t_{(5-2=3)}$$

$$\text{R.R.: Reject } H_0 \text{ at } \alpha = 0.05 \text{ if } |T^*| > t_{0.025(3)} = 3.182$$

$$\therefore T^* = \frac{6.5118 - 0}{\sqrt{\frac{32.9131}{152.8}}} = 14.0307 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

$$\text{其中 } MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{SS_Y - \hat{\beta}_1^2 SS_X}{n-2} = 32.9131$$

結論：我們有足夠證據去推論此迴歸線是顯著的。

$$(三) \hat{y} = 14.9484 + 6.5118 \times 25 = 177.7434 \text{ (\$)}$$

【版權所有，重製必究！】