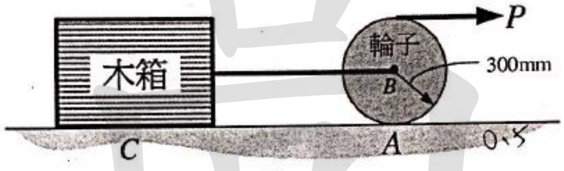
《靜力學與材料力學》

一、圖一中，木箱及輪子的質量分別為80 kg及30 kg。設木箱與地面的最大靜摩擦係數為$\mu_{sc}=0.25$，輪子與地面的最大靜摩擦係數為$\mu_{sA}=0.5$，求產生臨界運動之最小力$P=$？又，設木箱與地面的最大靜摩擦係數μ_{sc}還是0.25，若臨界運動時，欲使木箱及輪子皆為滑動，則輪子與地面的最大靜摩擦係數為$\mu_{sA}=$？（25分）



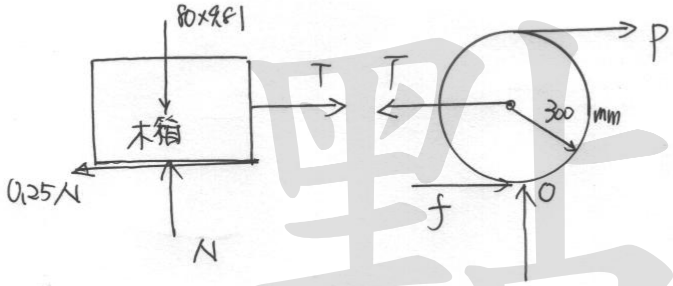
圖一

試題評析	屬於摩擦較難的題型→運動狀況未明。計算量較大，同學不易拿分。
考點命中	《高點突破靜力學》講義P3-50題型相同。

解：

(1) 求 假設木箱滑動時所須之P力=?

⇒此時輪子純滾動.



① 取木箱：

$\because \Sigma F_y=0 \Rightarrow N=80\times 9.81=784.8\ (N)$

$\because \Sigma F_x=0 \Rightarrow T=0.25\times 784.8=196.2(N)$

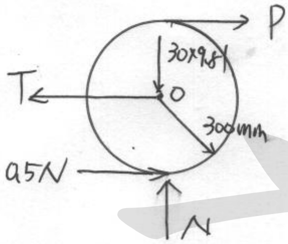
② 取輪子：

$\Sigma M_O=0$

$P\times 600-196.2\times 300=0$

$\therefore P=98.1\ (N)$

(2) 求假設輪子先滑動時之 $P=?$

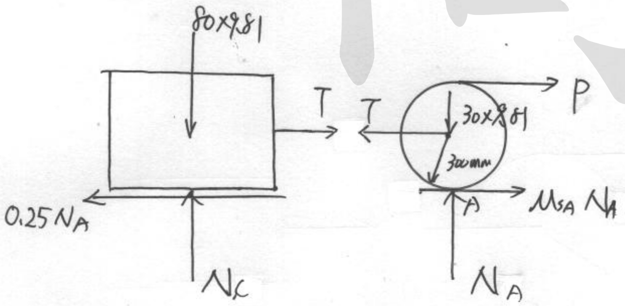


$\because \Sigma F_y=0 \Rightarrow N = 30\times 9.81 = 294.3\ (N)$

$\because \Sigma M_o=0 \Rightarrow P\times 300 - 0.5\times 294.3\times 300 = 0 \Rightarrow P = 147.15\ (N)$

$\therefore \Rightarrow$ 產生臨界移動之最小 $P = 98.1\ (N)$

(3) 求木箱與輪子皆為滑動時之 $\mu_{sA}=?$



① 取木箱：

$\because \Sigma F_y=0 \Rightarrow N_C = 80\times 9.81 = 784.8\ (N)$

$\because \Sigma F_x=0 \Rightarrow T = 0.25\times 784.8 = 196.2\ (N)$

② 取輪子：

$\because \Sigma F_y=0 \Rightarrow N_A = 30\times 9.81 = 294.3\ (N)$

$\because \Sigma M_A=0 \Rightarrow P\times 600 - 196.2\times 300 = 0 \Rightarrow P = 98.1\ (N)$

$\because \Sigma F_x=0 \quad \xrightarrow{+}$

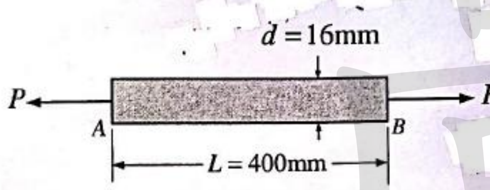
$98.1 - 196.2 + \mu_{sA}(294.3) = 0$

$\therefore \mu_{sA} = 0.333$

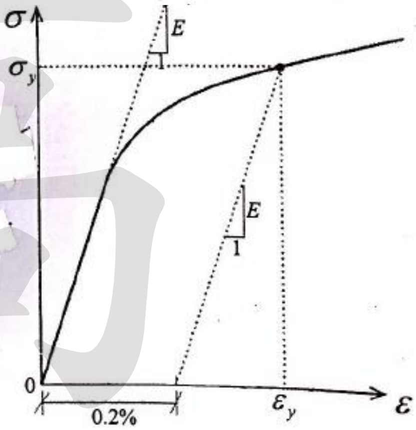
二、圖二(a)所示之實心圓桿 AB，其長 $L=400$ mm，直徑 $d=16$ mm。圓桿 AB 受到拉力 $P=60$ kN作用，若實心圓桿 AB 之應力應變關係為：

$$\sigma=\frac{124000\varepsilon}{1+300\varepsilon} \quad \text{當} \quad 0\le\varepsilon\le0.03 \quad (\sigma\text{的單位為MPa})$$

若圓桿 AB 之楊氏模數 $E=124$ GPa，求0.2%偏差降伏應力（offset yield stress）σ_y（參考示意圖二(b)）；當拉力 $P=60$ kN作用時，圓桿 AB 之伸長量 $\delta=$？又，卸載後，圓桿 AB 之永久伸長量 $\delta_P=$？（25分）



圖二(a)

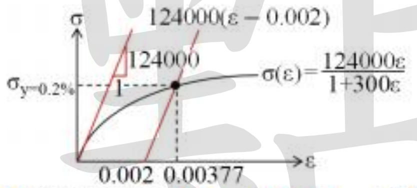


示意圖二(b)

試題評析	本題超級雷同102年結構技師與105年地特三等考題，程老師有說過地特三等很容易考軸力桿件非彈性分析，果然又命中了！
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題10.1.3、10.1.7。 2.《高點材料力學講義》，程中鼎編著，例題10.1.10。

解：

1.計算0.2%偏差降伏應力 $\sigma_{y=0.2\%}$



題目已告知圓桿AB**初始斜率值**為E = 124 GPa = 124000 MPa，**位於應變值 ε = 0.2% = 0.002處且平行於初始斜率之方程式**為**124000(ε − 0.002)**，此方程式與題目所給非線性方程式相交之點所對應的應變值ε為：

$$(124000)(\varepsilon-0.002)=\frac{124000\varepsilon}{1+300\varepsilon} \Longrightarrow \text{可解}\varepsilon=0.00377$$

將ε = 0.00377再代回題目所給非線性方程式曲線，可得到 **0.2%偏距法**所對應之降伏應力值 $\sigma_{y=0.2\%}$：

$$\sigma_{y=0.2\%}=\sigma(\varepsilon=0.00377)=\frac{(124000)(0.00377)}{1+(300)(0.00377)}=\underline{219.371\text{ MPa}}$$

2.拉力P = 60 kN作用下圓桿AB伸長量

圓桿AB承受應力$\sigma_{AB} = \dfrac{P}{A_{AB}} = \dfrac{60\times10^3}{\frac{\pi}{4}(16)^2} = 298.416$ MPa

由$(\sigma_{AB})(1+300\varepsilon_{AB}) = 124000\varepsilon_{AB} \Rightarrow (298.416)(1+300\varepsilon_{AB}) = 124000\varepsilon_{AB}$

$\Rightarrow$可解出圓桿AB應變值$\varepsilon_{AB} = 0.00866$

圓桿AB伸縮量$\delta_{AB} = \varepsilon_{AB}L_{AB} = (0.00866)(400) = \underline{3.464\text{ mm}}$ (伸長)

3.卸載後圓桿AB永久伸長量δ_p

卸載即是對圓桿AB施加一對大小相等、方向相反之壓力。(圓桿AD殘留應變) = (加載時之應變)−(卸載時所生應變)：

$$\Rightarrow \varepsilon_{AB,r} = \varepsilon_{AB} - \frac{\overline{S_{AB}}}{EA_{AB}} = 0.00866 - \frac{60\times10^3}{(124\times10^3)(\frac{\pi}{4}\times16^2)} = 0.00625$$

(圓桿 AB 永久變形量δ_p) = (圓桿 AB 初始長度)(圓桿 AB 殘留應變)：

$\Rightarrow \delta_p = L_{AB}\varepsilon_{AB,r} = (400)(0.00625) = \underline{2.5\text{ mm}}$ (伸長)

三、圖三(a)所示之薄壁管 AB 受扭矩T作用，薄壁管 AB 的長$L = 0.5$ m，其截面為厚度$t = 5$ mm，半徑$r = 50$ mm之薄壁圓管，如圖三(b)所示。已知薄壁圓管 AB 之剪應力$\tau = 60$ MPa，剪力模數$G = 30$ GPa，求：扭矩T及 B 點之扭轉角ϕ_B（單位以度表之）。又，若薄壁圓管的底座（截面 A）是用6根直徑為d_b之錨釘拴緊，錨釘的位置距截面圓心為$r_0 = 70$ mm處，如圖三(c)所示，若每根錨釘之允許剪應力$(\tau_b)_{allow} = 48$ MPa，求每根錨釘之最小直徑d_b。(25分)

圖三(a) 圖三(b) 圖三(c)

試題評析	屬於簡單封閉薄壁管分析，公式有記就能得分。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題3.3.4。 2.《高點材料力學講義》，程中鼎編著，例題3.3.3。

解：

1.計算扭矩T及B點扭轉角ϕ_B

薄壁管中心線圍成的面積$A_m = \pi r^2 = \pi(50)^2 \text{ mm}^2$

由薄壁管扭轉剪應力$\tau = \dfrac{T}{2A_m t} \Rightarrow 60 = \dfrac{T}{(2)(\pi \times 50^2)(5)}$

$\Rightarrow$ 扭矩$\underline{T = 4712.389 \times 10^3 \text{ N-mm}}$

圓形薄壁管極慣性矩$J = \dfrac{(2A_m)^2}{\oint_0^{L_m} \dfrac{ds}{t}} = \dfrac{4(\pi^2 r^4)}{\dfrac{2\pi r}{t}} = 2\pi r^3 t = (2\pi)(50^3)(5) = 10\pi \times 50^3 \text{ mm}^4$

B點扭轉角$\phi_B = \dfrac{TL}{GJ} = \dfrac{(4712.389 \times 10^3)(0.5 \times 10^3)}{(30 \times 10^3)(10\pi \times 50^3)} = 0.02 \text{ rad} = \underline{1.146°}$

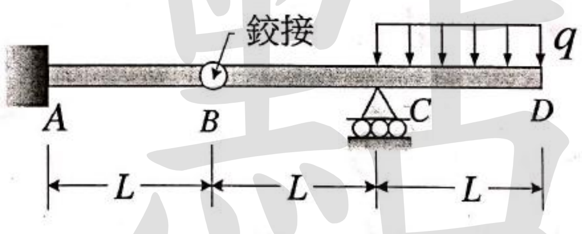
2.計算錨釘最小直徑d_b

透過(最大作用應力)≤(容許應力)反求錨釘最小直徑d_b

$\Rightarrow \tau_{T,錨釘} = \dfrac{T\rho_{錨釘}}{J_{錨釘}} \le \tau_{b,allow}$，其中$J_{錨釘} = A_b \sum r_i^2 = (\dfrac{\pi}{4} d_b^2)(6 \times 70^2)$

$\Rightarrow \dfrac{(4712.389 \times 10^3)(70)}{(\dfrac{\pi}{4} d_b^2)(6 \times 70^2)} \le 48 \Rightarrow$ $\underline{錨釘最小直徑 d_b \ge 17.25 \text{ mm}}$

四、圖四之梁 AB 及梁 BCD 於 B 點用鉸接連接，於 CD 段受到均布載重作用，梁 AB 及梁 BCD 之撓曲剛度皆為 EI，求 B 點的撓度 δ_B、C 點旋轉角 θ_C、D 點撓度 δ_D 及 D 點旋轉角 θ_D。（請標示方向）（25分）



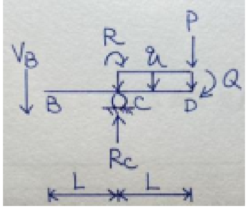
圖四

試題評析	本題屬於靜定梁求解特定點撓度與撓角題型，題目無指定方法故任選一拿手作法即可，本題採共軛梁法亦是個不錯選擇。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題8.2.3。 2.《高點材料力學講義》，程中鼎編著，例題8.3.1。

解：

1.必要時先修整負載

在 D 點垂直方向施加一個虛擬集中力 P 及順時針虛擬力矩 Q、C 點處施加順時針虛擬力矩 R。



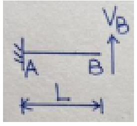
2.計算 B 點撓度δ_B

取出桿件 BCD 段計算 C 點垂直反力與 B 點剪力：

$$\sum M_B=0 \Rightarrow R_C=\frac{R+Q}{L}+\frac{3qL}{2}+2P$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow V_B=\frac{R+Q}{L}+\frac{qL}{2}+P$$

將 B 點剪力畫至 AB 段並將「AB 段視為懸臂梁在端點有集中載重作用」可求出 B 點撓度δ_B(計算時 $P=Q=R=0$)：



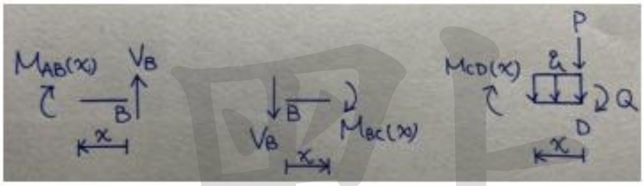
$$\delta_B=\frac{V_BL^3}{3EI}=\frac{(\frac{qL}{2})(L^3)}{3EI}=\underline{\frac{qL^4}{6EI}\ (\uparrow)}$$

3.分析各桿彎矩函數

此步驟寫出各段彎矩函數並整理如下表第四欄：

$$\text{AB 段彎矩函數}M_{AB}(x)=V_Bx=(\frac{R+Q}{L}+\frac{qL}{2}+P)x=\text{BC 段彎矩函數}M_{BC}(x)$$

$$\text{CD 段彎矩函數}M_{CD}(x)=-Q-Px-\frac{qx^2}{2}$$



桿段	EI	桿長	彎矩函數 M(x) (P = Q = R = 0)	$\frac{\partial M(x)}{\partial P}$	$\frac{\partial M(x)}{\partial Q}$	$\frac{\partial M(x)}{\partial R}$
AB、BC	EI	L	$(\frac{R+Q}{L}+\frac{qL}{2}+P)x$	x	$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L}$
BC	EI	L	$-Q-Px-\frac{qx^2}{2}$	$-x$	-1	0

由**卡氏第二定理**求解 D 點撓度δ_D值：

$$\delta_D=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{2}{EI}\int_0^L(\frac{qL}{2}x)(x)\,dx+\frac{1}{EI}\int_0^L(-\frac{qx^2}{2})(-x)\,dx=\underline{\frac{11qL^4}{24EI}\ (\downarrow)}$$

由**卡氏第二定理**求解 D 點轉角θ_D值：

$$\theta_D=\frac{\partial U}{\partial Q}=\frac{2}{EI}\int_0^L(\frac{qL}{2}x)(\frac{x}{L})\,dx+\frac{1}{EI}\int_0^L(-\frac{qx^2}{2})(-1)\,dx=\underline{\frac{qL^3}{2EI}\ (\circlearrowright)}$$

由**卡氏第二定理**求解 C 點轉角θ_C值：

$$\theta_C=\frac{\partial U}{\partial R}=\frac{2}{EI}\int_0^L(\frac{qL}{2}x)(\frac{x}{L})\,dx+0=\underline{\frac{qL^3}{3EI}\ (\circlearrowright)}$$