《測量學》

一、於某一基線場使用特定之全站儀（Total Station）與稜鏡組合進行率定測量作業，所得順向施測水平距離如下表，試列出觀測方程式及說明計算過程求此儀器組合測距之精度±（C+S×D）mm，即求其中之C加常數（單位mm）、S乘常數（無單位ppm）之值，及計算此一率定成果之中誤差。（25分）

項次	順向施測 （儀器站→稜鏡站）	已知水平距離 D'（m）	實際水平距離 D（m）
1	0 → 1	D_1'	D_1
2	0 → 2	D_2'	D_2
3	0 → 3	D_3'	D_3
4	1 → 3	D_4'	D_4
5	2 → 3	D_5'	D_5

試題評析	本題為電子測距儀的延伸應用。採用最小二乘法解算未知數S與C，進一步解算未知數S與C之中誤差即可。
考點命中	第一章測量概論P.09

解：

1.條列出觀測方程式

0->1 : $D_1+V_1=C+S \times D_1'$

0->2 : $D_2+V_2=C+S \times D_2'$

0->3 : $D_3+V_3=C+S \times D_3'$

1->3 : $D_4+V_4=C+S \times D_4'$

2->3 : $D_5+V_5=C+S \times D_5'$

2.整理成矩陣形式

0->1 : $V_1=C+S \times D_1'-D_1$

0->2 : $V_2=C+S \times D_2'-D_2$

0->3 : $V_3=C+S \times D_3'-D_3$

1->3 : $V_4=C+S \times D_4'-D_4$

2->3 : $V_5=C+S \times D_5'-D_5$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & D_1' \\ 1 & D_2' \\ 1 & D_3' \\ 1 & D_4' \\ 1 & D_5' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \\ S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix}$$

改正數向量V: $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$，係數矩陣A: $\begin{bmatrix} 1 & D_1' \\ 1 & D_2' \\ 1 & D_3' \\ 1 & D_4' \\ 1 & D_5' \end{bmatrix}$，未知數向量X: $\begin{bmatrix} C \\ S \end{bmatrix}$，常數矩陣L: $\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix}$

3. 假設權與測距長度D成反比，可得權矩陣P= $\begin{bmatrix} \frac{1}{D_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D_5} \end{bmatrix}$

4. 最小二乘法解算未知數矩陣X

$\rightarrow \begin{cases} N = A^T PA \\ n = A^T PL \end{cases} \rightarrow X = N^{-1}n$，可得S與C

單位權中誤差 $\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{V^T PV}{(n-u)}}$

未知數變方協變方矩陣 $\sum X = \sigma_0 N^{-1}$ 可得C與S之精度

二、於二維水平面中測量不共線三點 A、B、C 間之水平距離分別為 AB＝102.32 m、AC＝140.24 m、BC＝192.54 m，若距離觀測為獨立且中誤差均為 ±0.05 m，試求三角形ABC面積及其中誤差。（25分）

試題評析	本題為誤差傳播之應用。透過海龍面積公式。
考點命中	採用海龍公式計算面積為第一次出現的考題，但本題重點為海龍公式中變數的線性化，因此可歸類於概論的誤差傳播推導。

解：

問題剖析

1. 海龍公式 ΔABC，$\begin{cases} a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}. \\ S = \frac{a+b+c}{2} \\ \Delta ABC = \sqrt{S \cdot (S-a) \cdot (S-b) \cdot (S-c)} \end{cases}$

2. 變數之線性化

參考題解

1. ΔABC，$\begin{cases} a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}. \\ S = \frac{a+b+c}{2} \\ \Delta ABC = \sqrt{S \cdot (S-a) \cdot (S-b) \cdot (S-c)} \end{cases}$

2. 變數之線性化

$$S=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\begin{aligned}\Delta ABC &= \sqrt{S\cdot(S-a)\cdot(S-b)\cdot(S-c)}\\ &= \sqrt{S\cdot(S-a)\cdot(S-b)\cdot(S-c)}\\ &= \sqrt{(S^2-Sa)\cdot(S-b)\cdot(S-c)}\\ &= \sqrt{(S^3-S^2a-S^2b+Sab)\cdot(S-c)}\\ &= \sqrt{(S^4-S^3a-S^3b-S^3c+S^2ab+S^2ac+S^2bc-Sabc)}\\ &= \sqrt{(S^4-S^3(a+b+c)+S^2(ab+ac+bc)-Sabc)}\end{aligned}$$

$$\Delta ABC=\Delta ABC_0+\frac{\partial\Delta ABC}{\partial a}\cdot da+\frac{\partial\Delta ABC}{\partial b}\cdot db+\frac{\partial\Delta ABC}{\partial c}\cdot dc+...$$

參考：微分之連鎖率：$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(S^4)}{\partial a}=[4\cdot S^3\cdot\dfrac{1}{2}]\\ \dfrac{\partial(S^4)}{\partial b}=[4\cdot S^3\cdot\dfrac{1}{2}]\\ \dfrac{\partial(S^4)}{\partial c}=[4\cdot S^3\cdot\dfrac{1}{2}]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial[S^3(a+b+c)]}{\partial a}=3\cdot S^2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(a+b+c)+S^3\\ \dfrac{\partial[S^3(a+b+c)]}{\partial b}=3\cdot S^2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(a+b+c)+S^3\\ \dfrac{\partial[S^3(a+b+c)]}{\partial c}=3\cdot S^2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(a+b+c)+S^3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial[S^2(ab+ac+bc)]}{\partial a}=[2\cdot S\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(ab+ac+bc)+S^2\cdot(b+c)]\\ \dfrac{\partial[S^2(ab+ac+bc)]}{\partial b}=[2\cdot S\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(ab+ac+bc)+S^2\cdot(a+c)]\\ \dfrac{\partial[S^2(ab+ac+bc)]}{\partial c}=[2\cdot S\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(ab+ac+bc)+S^2\cdot(a+b)]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(Sabc)}{\partial a}=[\dfrac{abc}{2}+S\cdot bc]\\ \dfrac{\partial(Sabc)}{\partial b}=[\dfrac{abc}{2}+S\cdot ac]\\ \dfrac{\partial(Sabc)}{\partial c}=[\dfrac{abc}{2}+S\cdot ab]\end{cases}$$

$$\Delta ABC=\Delta ABC_0+\frac{\partial \Delta ABC}{\partial a}\cdot da+\frac{\partial \Delta ABC}{\partial b}\cdot db+\frac{\partial \Delta ABC}{\partial c}\cdot dc+...$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Delta ABC}{\partial a}=\dfrac{\dfrac{\partial (S^4)}{\partial a}-\dfrac{\partial [S^3(a+b+c)]}{\partial a}+\dfrac{\partial [S^2(ab+ac+bc)]}{\partial a}-\dfrac{\partial (Sabc)}{\partial a}}{2\cdot \Delta ABC}\\ \dfrac{\partial \Delta ABC}{\partial b}=\dfrac{\dfrac{\partial (S^4)}{\partial b}-\dfrac{\partial [S^3(a+b+c)]}{\partial b}+\dfrac{\partial [S^2(ab+ac+bc)]}{\partial b}-\dfrac{\partial (Sabc)}{\partial b}}{2\cdot \Delta ABC}\\ \dfrac{\partial \Delta ABC}{\partial c}=\dfrac{\dfrac{\partial (S^4)}{\partial c}-\dfrac{\partial [S^3(a+b+c)]}{\partial c}+\dfrac{\partial [S^2(ab+ac+bc)]}{\partial c}-\dfrac{\partial (Sabc)}{\partial c}}{2\cdot \Delta ABC}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Delta ABC}{\partial a}=\dfrac{[4\cdot S^3\cdot \frac{1}{2}]-[3\cdot S^2\cdot \frac{1}{2}\cdot (a+b+c)+S^3]+[2\cdot S\cdot \frac{1}{2}\cdot (ab+ac+bc)+S^2\cdot (b+c)]-[\frac{abc}{2}+S\cdot bc]}{2\cdot \Delta ABC}\\ \dfrac{\partial \Delta ABC}{\partial b}=\dfrac{[4\cdot S^3\cdot \frac{1}{2}]-[3\cdot S^2\cdot \frac{1}{2}\cdot (a+b+c)+S^3]+[2\cdot S\cdot \frac{1}{2}\cdot (ab+ac+bc)+S^2\cdot (a+c)]-[\frac{abc}{2}+S\cdot ac]}{2\cdot \Delta ABC}\\ \dfrac{\partial \Delta ABC}{\partial c}=\dfrac{[4\cdot S^3\cdot \frac{1}{2}]-[3\cdot S^2\cdot \frac{1}{2}\cdot (a+b+c)+S^3]+[2\cdot S\cdot \frac{1}{2}\cdot (ab+ac+bc)+S^2\cdot (a+b)]-[\frac{abc}{2}+S\cdot ab]}{2\cdot \Delta ABC}\end{cases}$$

$a=\overline{BC}=192.540$

$b=\overline{CA}=140.240$

$c=\overline{AB}=102.320$

$S=\dfrac{a+b+c}{2}=217.550$

$\Delta ABC=\sqrt{S\cdot (S-a)\cdot (S-b)\cdot (S-c)}=6962.048$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Delta ABC}{\partial a}=\dfrac{[4\cdot S^3\cdot \frac{1}{2}]-[3\cdot S^2\cdot \frac{1}{2}\cdot (a+b+c)+S^3]+[2\cdot S\cdot \frac{1}{2}\cdot (ab+ac+bc)+S^2\cdot (b+c)]-[\frac{abc}{2}+S\cdot bc]}{2\cdot \Delta ABC}\\ \dfrac{\partial \Delta ABC}{\partial b}=\dfrac{[4\cdot S^3\cdot \frac{1}{2}]-[3\cdot S^2\cdot \frac{1}{2}\cdot (a+b+c)+S^3]+[2\cdot S\cdot \frac{1}{2}\cdot (ab+ac+bc)+S^2\cdot (a+c)]-[\frac{abc}{2}+S\cdot ac]}{2\cdot \Delta ABC}\\ \dfrac{\partial \Delta ABC}{\partial c}=\dfrac{[4\cdot S^3\cdot \frac{1}{2}]-[3\cdot S^2\cdot \frac{1}{2}\cdot (a+b+c)+S^3]+[2\cdot S\cdot \frac{1}{2}\cdot (ab+ac+bc)+S^2\cdot (a+b)]-[\frac{abc}{2}+S\cdot ab]}{2\cdot \Delta ABC}\end{cases}$$

$$\frac{\partial (S^4)}{\partial a}=[4\cdot S^3\cdot \frac{1}{2}]=20592413.888$$

$$\frac{\partial [S^3(a+b+c)]}{\partial a}=3\cdot S^2\cdot \frac{1}{2}\cdot (a+b+c)+S^3=41184827.776$$

$$\frac{\partial[S^2(ab+ac+bc)]}{\partial a}=[2\cdot S\cdot\frac{1}{2}\cdot(ab+ac+bc)+S^2\cdot(b+c)]=24761712.255$$

$$\frac{\partial[S^2(ab+ac+bc)]}{\partial b}=[2\cdot S\cdot\frac{1}{2}\cdot(ab+ac+bc)+S^2\cdot(a+c)]=27236966.786$$

$$\frac{\partial[S^2(ab+ac+bc)]}{\partial c}=[2\cdot S\cdot\frac{1}{2}\cdot(ab+ac+bc)+S^2\cdot(a+b)]=29031644.641$$

$$\frac{\partial(Sabc)}{\partial a}=[\frac{abc}{2}+S\cdot bc]=4503115.151$$

$$\frac{\partial(Sabc)}{\partial b}=[\frac{abc}{2}+S\cdot ac]=5667298.298$$

$$\frac{\partial(Sabc)}{\partial c}=[\frac{abc}{2}+S\cdot ab]=7255656.258$$

$$\begin{cases}\frac{\partial\Delta ABC}{\partial a}=-23.974\\ \frac{\partial\Delta ABC}{\partial b}=+70.184\\ \frac{\partial\Delta ABC}{\partial c}=+85.002\end{cases}$$

$$\Delta ABC=\Delta ABC_0+\frac{\partial\Delta ABC}{\partial a}\cdot da+\frac{\partial\Delta ABC}{\partial b}\cdot db+\frac{\partial\Delta ABC}{\partial c}\cdot dc+...$$

$$\mathrm{M}_{\Delta ABC}=\pm\sqrt{(\frac{\partial\Delta ABC}{\partial a})^2\cdot\sigma_{\mathrm{L}}^2+(\frac{\partial\Delta ABC}{\partial b})^2\cdot\sigma_{\mathrm{L}}^2+(\frac{\partial\Delta ABC}{\partial c})^2\cdot\sigma_{\mathrm{L}}^2}$$

$$\mathrm{M}_{\Delta ABC}=\pm\sqrt{(-23.974)^2\cdot(0.05)^2+(70.184)^2\cdot(0.05)^2+(85.002)^2\cdot(0.05)^2}=\pm 5.640m$$

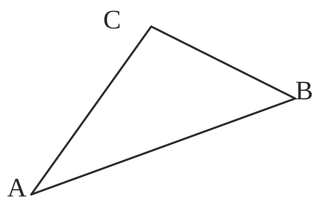
三、於二維平面直角（E、N）坐標系統中二已知點A（100.00, 50.80）、B（480.00, 152.30），今使用一台全站儀設置測站於A點，後視B點將水平角度盤歸零，觀測C點水平角讀數為300°0'00"；移置測站於B點，後視A點將水平角度盤歸零，觀測C點水平角讀數為65º0'00"，試繪草圖及列出觀測方程式計算C點平面坐標（E_c, N_c）。（25分）

試題評析	本題為前方交會之運算，惟需另納入正弦公式之應用。
考點命中	第五章坐標系統P.04

解：

問題剖析

1. 前方交會計算
2. 正弦公式計算邊長



參考題解

1. 前方交會計算

$$\begin{cases}X_C=X_A+\Delta X_{AC}=X_A+D_{AC}\cdot\sin Azi_{\overline{AC}}\\ Y_C=Y_A+\Delta Y_{AC}=Y_A+D_{AC}\cdot\cos Azi_{\overline{AC}}\end{cases}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(X_B-X_A)^2-(Y_B-Y_A)^2}=\sqrt{(\Delta X_{AB})^2-(\Delta Y_{AB})^2}=393.322$$

$$D_{AC}\rightarrow\frac{\overline{AC}}{\sin\angle B}=\frac{\overline{AB}}{\sin\angle C},$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(65^o)}=\frac{393.322}{\sin(180^o-60^o-65^o)}，D_{AC}=435.171$$

$$Azi_{\overline{AC}}=Azi_{\overline{AB}}-\angle A$$

$$Azi_{\overline{AB}}=90^0\text{-}\tan^{-1}(\frac{Y_B-Y_A}{X_B-X_A})=90^0\text{-}\tan^{-1}(\frac{101.500}{380.000})=90^\circ-14^\circ57'18''=75^\circ02'42''$$

$$Azi_{\overline{AC}}=Azi_{\overline{AB}}-\angle B=75^\circ02'42''-60^\circ00'00''=15^\circ02'42''$$

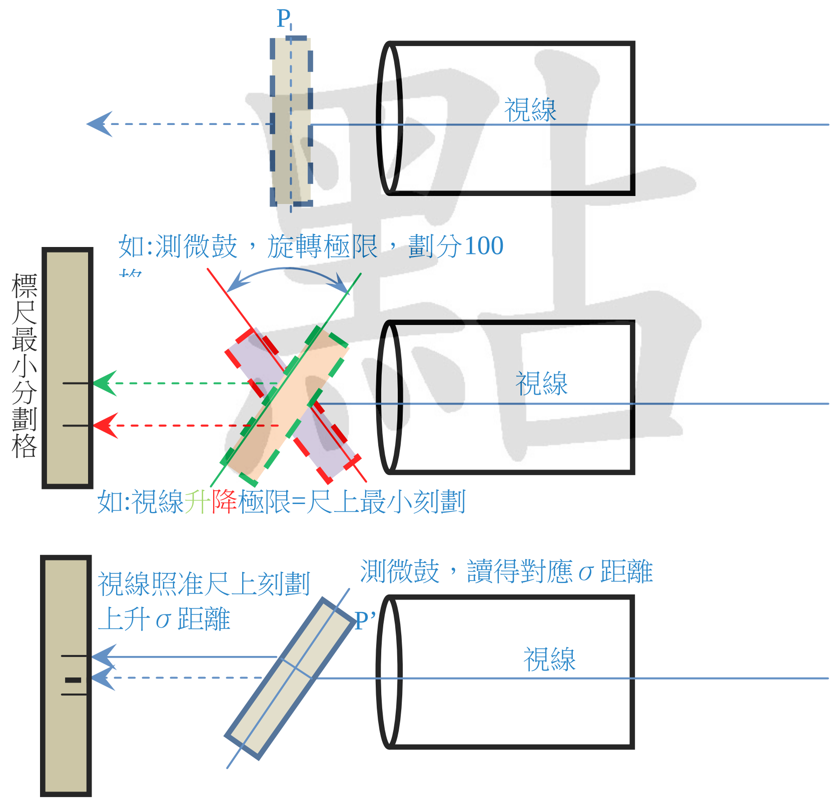
$$\begin{cases}X_C=X_A+D_{AC}\cdot\sin Azi_{\overline{AC}}=100.000+435.171\cdot\sin(15^o02'42'')\\ Y_C=Y_A+D_{AC}\cdot\cos Azi_{\overline{AC}}=50.800+435.171\cdot\cos(15^o02'42'')\end{cases},\begin{cases}X_C=212.961\\ Y_C=471.054\end{cases}$$

四、精密水準測量一般使用精密水準儀搭配平行玻璃板測微器（Parallel plate micrometer）與鋼鋼水準尺施測，試繪簡圖並說明平行玻璃板測微器之作用原理。（25分）

試題評析	本題為水準儀的儀器應用。
考點命中	第三章，水準測量P04。

解：

平行玻璃板原理:兩面互相平行之玻璃版，裝置于水準儀物鏡前，藉玻璃版不同傾斜之折光，水平視線仍平行升降以讀定標尺最小分劃格之小數，此板即稱平行（平面）玻璃板。



如圖：玻璃版由一桿相連于測微鼓D，當版直立如P時，水平視線不發生曲折，直射如虛線進行，此時測微鼓讀數為零。旋轉測微鼓而使玻璃版傾斜如P` 時，則水平視線平行升降如實線進行，升降距離 δ 之大小，隨玻璃版傾斜之大小而定，如測微鼓旋轉一周，引致視線升降距離 δ 與標尺最小分劃大小相等，則標尺最小格讀數，可于測微鼓上讀定之，測微鼓如刻記100分劃，則此時可讀得標尺最小格之百分之一。