

# 《靜力學與材料力學》

- 一、如圖 1 所示之二分之一圓弧形桿件， $O$  點為圓心，半徑  $R=4\text{ m}$ ， $a$  點及  $c$  點為鉸支承， $b$  點為鉸接，角度  $\theta=45^\circ$ ，載重  $P=10\text{ kN}$ 、 $F=10\text{ kN}$ 。分別求  $a$ 、 $c$  點鉸支承反力的水平與垂直分量，及桿件在  $e$  點的彎矩、剪力與軸力。(25 分)

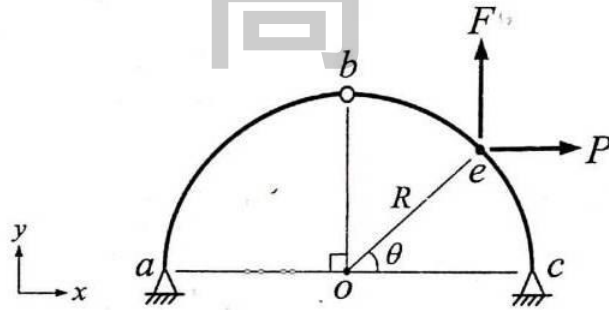


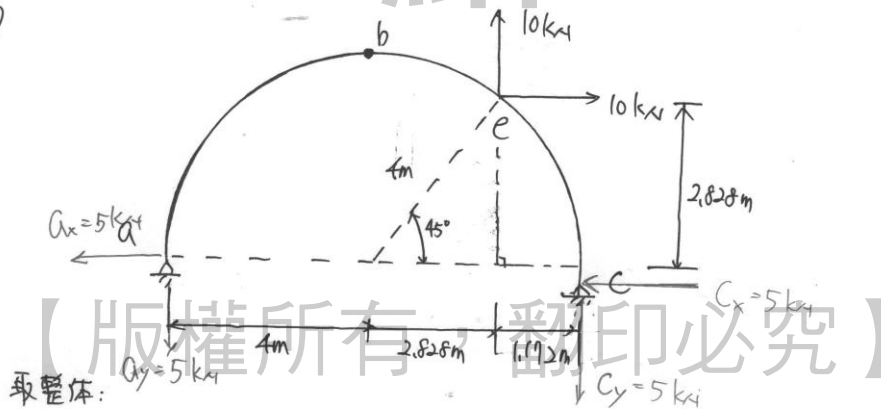
圖 1

**試題評析** 此題為靜定桁架靜力分析，屬於基本簡單題型。

**考點命中** 《高點土木突破靜力學教材》P2-89 題目一樣！

解：

解：(1)



取整體：

$$\sum M_a = 0 \quad (2)$$

$$C_y(8) + 10 \times 2.828 - 10 \times (4 + 2.828) = 0 \Rightarrow C_y = 5 \text{ (kN)} \quad (\downarrow)$$

$$\therefore \sum F_y = 0 \quad \therefore A_y = 5 \text{ (kN)} \quad (\downarrow)$$

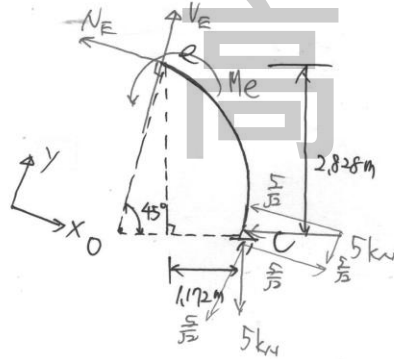
取  $ab$  段：

$$\sum M_b = 0 \Rightarrow A_x = 5 \text{ (kN)} \quad (\leftarrow)$$

取整體。

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 5 \text{ (kN)} (\leftarrow)$$

(2) 取 CE 段分析：



$$\sum M_e = 0 \Rightarrow M_e = 5 \times 1.172 + 5 \times 2.828 = 20 \text{ (kN-m)} (\curvearrowright)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_E = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_E = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ (kN)} (\uparrow)$$

二、如圖 2 所示構架，桿  $ab$ 、桿  $bc$  及桿  $cd$  為剛性桿件， $a$  點及  $d$  點為鉸支承， $b$  點及  $c$  點為鉸接，彈簧係數  $k=125 \text{ kN/m}$ ，長度  $l=2 \text{ m}$ 、 $h=3 \text{ m}$ 。求臨界挫屈負載  $P_{cr}$ 。(25 分)

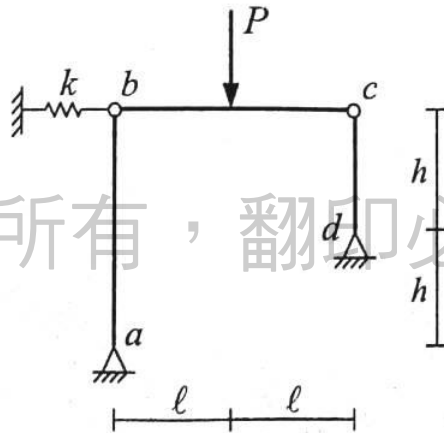


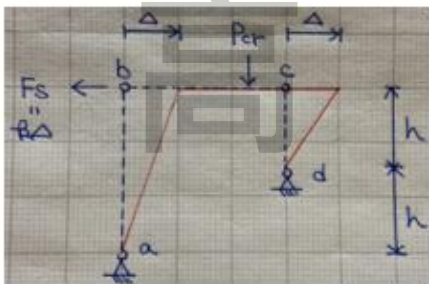
圖 2

試題評析	本題屬剛性系統求臨界載重 $P_{cr}$ 題型，比較麻煩的是要先畫出各分離體圖，抽絲剝繭後再由力平衡得到臨界載重值。
考點命中	1. 《國考材料力學重點暨題型解析-下冊》，高點文化出版，程中鼎編著，例題 9.1.3。 2. 《高點材料力學講義》，程中鼎編著，例題 9.1.4。

解：

## 1. 給予系統一微小擾動

剛體受微小擾動後如下圖所示，因剛體結構不會產生彎曲變形故變形後各桿仍保持(斜)直線，假設變形後上段梁桿件有側移為 $\Delta$ 。



## 2. 計算桿上各內力值

b點直線彈簧內力 $F_s = (k)(\Delta)$ (拉力)。接著將bc桿段自由體單獨拿出來作分析，令b點鉸接內力為 $b_x$ 與 $b_y$ 、c點鉸接內力為 $c_x$ 與 $c_y$ 。分別對b點與c點取力矩平衡可得到 $c_y$ 與 $b_y$ ：

$$\sum M_b = 0 \Rightarrow c_y = \frac{P_{cr}}{2}$$

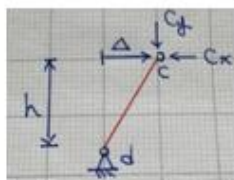
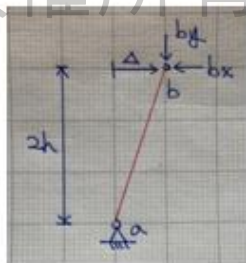
$$\sum M_c = 0 \Rightarrow b_y = \frac{P_{cr}}{2}$$

接著取出桿件ab段(已微小擾動)，對下方a點取力矩平衡可得到 $b_x$ ：

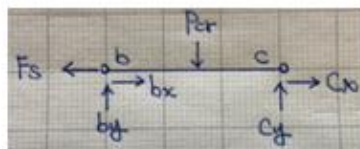
$$\sum M_a = 0 \Rightarrow b_x = \frac{b_y \Delta}{2h} = \frac{P_{cr} \Delta}{4h}$$

再取出桿件cd段(已微小擾動)，對下方d點取力矩平衡可得到 $c_x$ ：

$$\sum M_d = 0 \Rightarrow c_x = \frac{c_y \Delta}{h} = \frac{P_{cr} \Delta}{2h}$$



點



3. 由靜力平衡式求臨界載重  $P_{cr}$

最後由桿件bc段(已微小擾動)水平方向力平衡得到臨界載重  $P_{cr}$  :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_s = b_x + c_x \Rightarrow k\Delta = P_{cr} \left( \frac{3\Delta}{4h} \right) \Rightarrow P_{cr} = \frac{4kh}{3} = \frac{4(125)(3)}{3} = \underline{500 \text{ kN}}$$

三、如圖 3 所示工型斷面之直樑，材料之彈性模數  $E = 240 \text{ GPa}$ 。當工型斷面承受  $M_z = 24 \text{ kN}\cdot\text{m}$  彎矩及  $V_y = 12.5 \text{ kN}$  剪力作用，求此時樑中性軸曲率半徑、 $a$  點正向應力  $\sigma_x$  及  $b$  點剪應力  $\tau_{xy}$ 。(25 分)

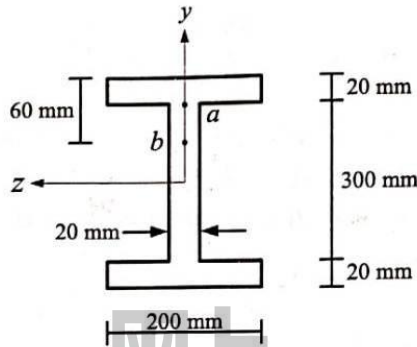


圖 3

試題評析	屬於簡單梁應力分析題型，不要按錯計算機就會得分。
考點命中	1.《國考材料力學重點暨題型解析-上冊》，高點文化出版，程中鼎編著，例題4.2.6。 2.《高點材料力學講義》，程中鼎編著，例題4.2.9。

解：

1. 計算中性軸曲率半徑  $\rho$

$$z \text{ 軸慣性矩 } I_z = \frac{1}{12} (200 \times 340^3 - 180 \times 300^3) = 250.067 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{曲率半徑 } \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{EI_z}{M_z} = \frac{(240 \times 10^3)(250.067 \times 10^6)}{24 \times 10^6} = 2500670 \text{ mm} = \underline{2500.67 \text{ m}}$$

2.  $a$  點正向應力  $\sigma_x$

$$\sigma_x = \frac{M_z y_a}{I_z} = \frac{(24 \times 10^6)(150)}{250.067 \times 10^6} = \underline{14.396 \text{ MPa}}$$

3.  $b$  點剪應力  $\tau_{xy}$

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_b}{I_z b} = \frac{(12.5 \times 10^3)(200 \times 20 \times 160 + 40 \times 20 \times 130)}{(250.067 \times 10^6)(20)} = \underline{1.860 \text{ MPa}}$$

四、某點平面應力狀態如圖 4 所示，求其主應力、最大剪應力，及當  $\theta = 60^\circ$  作用在  $AB$  斜面的應力分量  $\sigma_{x'}$  與  $\tau_{x'y'}$ 。(25 分)

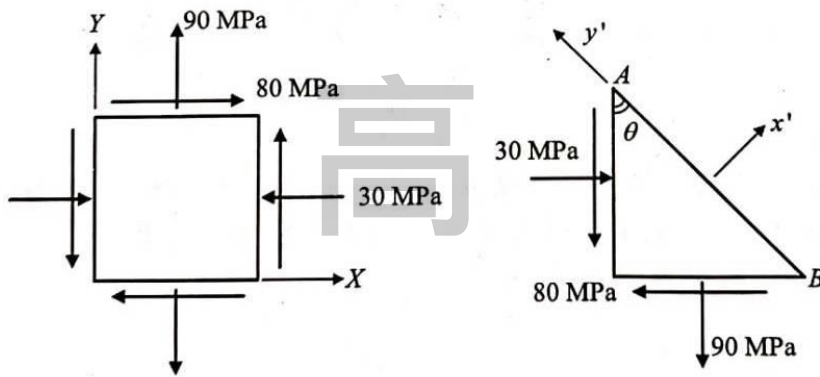


圖 4

試題評析	屬於簡單應力莫爾圓分析題型，不要按錯計算機與背錯公式就會得分。
考點命中	1. 《國考材料力學重點暨題型解析-下冊》，高點文化出版，程中鼎編著，例題 6.2.1。 2. 《高點材料力學講義》，程中鼎編著，例題 6.2.2。

解：

1. 寫出正向應力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  及剪應力  $\tau_{xy}$  值

採用拉逆為正符號系統， $\sigma_x = -30 \text{ MPa}$ 、 $\sigma_y = 90 \text{ MPa}$ 、 $\tau_{xy} = 80 \text{ MPa}$ 。

2. 由應力莫爾圓觀念求主應力與最大剪應力

莫爾圓圓心及半徑計算如下：

$$\text{圓心}(\sigma_{\text{avg}}, 0) = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) = \left( \frac{-30 + 90}{2}, 0 \right) = (30, 0)$$

$$\text{半徑 } R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left( \frac{-30 - 90}{2} \right)^2 + (80)^2} = 100$$

由應力莫爾圓可知最大主應力  $\sigma_1 = \text{圓心} + \text{半徑}$ ，最小主應力  $\sigma_2 = \text{圓心} - \text{半徑}$ ：

$$\text{最大主應力 } \sigma_1 = \text{圓心} + \text{半徑} = 30 + 100 = \underline{130 \text{ MPa}} \text{ (拉應力)}$$

$$\text{最小主應力 } \sigma_2 = \text{圓心} - \text{半徑} = 30 - 100 = \underline{-70 \text{ MPa}} \text{ (壓應力)}$$

$$\text{最大剪應力 } \tau_{\text{max}} = \text{半徑 } R = \underline{100 \text{ MPa}}$$

3. 計算 $\theta = 60^\circ$ 之AB斜面應力分量 $\sigma_{x'}$ 與 $\tau_{x'y'}$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'} = \frac{-30+90}{2} + \left(\frac{-30-90}{2}\right) \cos(2 \times 60^\circ) + 80 \sin(2 \times 60^\circ) = \underline{129.282 \text{ MPa (拉應力)}}$$

$$\tau_\theta = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \tau_{x'y'} = -\left(\frac{-30-90}{2}\right) \sin(2 \times 60^\circ) + 80 \cos(2 \times 60^\circ) = \underline{11.962 \text{ MPa}}$$

高  
點

【版權所有，翻印必究】