《統計學》

試題評析	本次題目考五大題，題目整體偏難，建議同學在考場上一定要有取捨，加上題目有點多，注意時間的分配，簡單且基本的分數一定要先拿，有變化的題目一時間想不到就先跳過。

一、以下是關於條件機率以及指數分配（exponential distribution）的問題。（每小題10分，共20分）

(一)一政府官員在5個治安情形不同的國家洽公，假定此政府官員的行程如下：A國→B國→C國→D國→E國。如果各國錢包被偷的機率是A國為0.02，B國為0.03，C國為0.07，D國為0.01。已知此官員抵達E國時，錢包已被偷（非在E國被偷），請問此官員其錢包在C國被偷的機率為何？

(二)一辦公室在A地之政府官員要到B地開會，此官員必須先從辦公室走路9分鐘至一公車站，然後坐上公車直達B地開會地點。已知在此公車站其任一公車之間隔到達時間服從一平均值20（分鐘）的指數分配（exponential distribution），其中公車之間隔到達時間是指從這班車離開之時間算起到下一班車到達所需等待之時間。若此官員要不晚於上午10點40分坐上公車，開會才不會遲到。請問此官員最晚應在什麼時間從辦公室出發，才會有至少0.9的機率不會遲到（答案請計算至分鐘單位；log(a)為數字a的自然對數值，log(2)=0.69，log(3)=1.1，log(10)=2.3，log(13)=2.56）。

試題評析	為條件機率一與指數分配，其中指數分配與我們講義中例題概念類似。
考點命中	1.《高點・高上統計學講義》第一回，ch2-3條件機率，蘇建郎編撰，頁59。 2.《高點・高上統計學講義》第二回，ch4-1一維常用分配離散型，蘇建郎編撰，頁88。

答：

(一)假設事件 A,B,C,D 分別為該官員經過被偷之事件

$$P(A)=0.02$$

$$P(B)=0.98\times 0.03=0.0294$$

$$P(C)=0.98\times 0.97\times 0.07=0.0665$$

$$P(D)=0.98\times 0.97\times 0.93\times 0.01=0.0019$$

錢包在C國被偷的機率為 $\dfrac{0.0665}{0.02+0.0294+0.0665+0.0019}=0.5645$

(二) $X\sim\exp(\beta=20)$， 隨機變數 $X\sim\exp(\beta=20)$ 為到公車站等公車時間

$$0.9=P(X<k)=1-e^{-\frac{k}{20}} \Rightarrow 0.1=e^{-\frac{k}{20}} \Rightarrow -\ln 10=-\frac{k}{20}$$

$$\Rightarrow k=(-20)\times(-2.3)=46$$

從辦公室出發加上等車至少要9+46=55分，故最晚9點45分前就要從辦公室出發，才能保證至少0.9的機率不會遲到。

二、以下是關於最大概似估計量（maximum likelihood estimator）以及假設檢定的問題。（每小題10分，共20分）

(一)考慮以下離散型機率分配函數（discrete probability distribution function）

$$f(x)=\begin{cases}(\theta^2+3)(\frac{1}{\theta^2+c^2})^x, x=1,2,3,\ldots \\ 0 \qquad\qquad\qquad ,\text{其他}\end{cases}$$

其中θ是參數而c是欲求的數。一組服從上述機率分配的母體所得到的一組隨機樣本如下：

1	3	1	2	4	1

請計算*c*的可能值以及根據此組樣本所得之參數θ的最大概似估計量的值。

(二)某電競遊戲設計為共4道關卡的闖關遊戲，假定X為通過關卡數的隨機變數且其分配是一個成功機率為*p*的二項式分配（binomial distribution），其中X的可能值為0,1,2,3,4。針對以下假設 $H_0: p=\frac{1}{2}$ 對 $H_1: p=\frac{1}{4}$，給定以下4種檢定法：

檢定法A：如果*X*=4，則拒絕 H_0，反之則不拒絕 H_0，即拒絕域（rejection region）為集合{4}；

檢定法B：如果*X*=0，則拒絕 H_0，反之則不拒絕 H_0，即拒絕域為集合{0}；

檢定法C：如果 $X\le 1$，則拒絕 H_0，反之則不拒絕 H_0，即拒絕域為集合{0,1}；

檢定法D：如果*X*=0或X=4，則拒絕 H_0，反之則不拒絕 H_0，即拒絕域為集合{0,4}。

設定顯著水準為 $\alpha=\frac{1}{16}$，請決定上述4種檢定法，那一個或那些檢定法是符合*α*之設定且有最大檢定力（power）的檢定法？

試題評析	這題考的是MLE相關性質(不變性)，這個題目如果可以分辨出幾何分配套用其結果可以省下很多時間；另一小題檢定力，講義中有一樣的分配概念。
考點命中	1.《高點・高上統計學講義》第三回，ch6-1點估計，蘇建郎編撰，頁5、9。 2.《高點・高上統計學講義》第二回，ch7-1假設檢定意義，蘇建郎編撰，頁60。

答：

(一) $f_X(x;\theta)=\frac{(\theta^2+3)}{(\theta^2+c^2)}(\frac{1}{(\theta^2+c^2)})^{x-1}$，$x=1,2,\ldots\ldots$

比較得知 $X\sim Geo(p=\frac{\theta^2+3}{\theta^2+c^2})$，$1-p=\frac{1}{\theta^2+c^2}$

$\Rightarrow \frac{\theta^2+3}{\theta^2+c^2}+\frac{1}{\theta^2+c^2}=1 \Rightarrow \frac{\theta^2+4}{\theta^2+c^2}=1 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow c=\pm 2$

$1-p=\frac{1}{\theta^2+c^2} \Rightarrow \theta=\pm\sqrt{\frac{1}{1-p}-c^2}$

已知幾何分配參數 p 之MLE為 $\frac{1}{\overline{X}}$，由MLE不變性得 $\hat{\theta}_{MLE}=\pm\sqrt{\frac{1}{1-\hat{p}_{MLE}}-c^2}$

題目所得資訊 $\overline{x}=2$，θ 估計值為 $\pm\sqrt{\frac{1}{1-0.5}-4}$，但根號裡計算出來為負，

表示此組樣本所得估計值無法得到參數 θ 的估計，即計算結果沒在 θ 合理的參數空間中。

(註：$\overline{x}$ 需要小接近1才有合理的參數 θ 的估計，

例如 $\overline{x}=1.2$ 才會得到 θ 估計值 $\pm\sqrt{2}$)

(二) $A=\{X=4\}$，$B=\{X=0\}$，$C=\{X=0,1\}$，$D=\{X=0,4\}$

在 H_0 為真下 $X \sim B(n=4, p=\frac{1}{2})$，$f_X(x)=C_x^4(\frac{1}{2})^4$，$x=0,1,2,3,4$

計算4個拒絕規則下之顯著水準

$\alpha_A = P_0(X=4)=C_4^4(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$，$\alpha_B = P_0(X=0)=C_0^4(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

$\alpha_C = P_0(X=0,1)=C_0^4(\frac{1}{2})^4+C_1^4(\frac{1}{2})^4=\frac{5}{16}$

$\alpha_D = P_0(X=0,4)=C_0^4(\frac{1}{2})^4+C_4^4(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{8}$

只有檢定法A,B符合 $\alpha=\frac{1}{16}$。

計算檢定法A,B之檢定力比較誰有最大的檢定力

在 H_1 為真下 $X \sim B(n=4, p=\frac{1}{4})$，$f_X(x)=C_x^4(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{4-x}$，$x=0,1,2,3,4$

$(1-\beta)_A = P_1(X=4)=C_4^4(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^0=\frac{1}{256}$

$(1-\beta)_B = P_1(X=0)=C_0^4(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^4=\frac{81}{256}$

檢定法B有最大的檢定力。

三、以下是關於朴松分配（Poisson distribution）以及二項式分配（binomial distribution）的參數估計問題。

(一)若一速食店一日來客人數服從於平均值為λ（人）的朴松分配（Poisson distribution），以下是隨機收集該速食店5日的每日來客人數資料：433人，375人，450人，375人，367人。根據上述資料，請算出 $\sqrt{\lambda}$ 的最大概似估計量（maximum likelihood estimator）的值。（5分）

(二)若隨機變數 $X_1, X_2, ..., X_{10}$ 是彼此獨立且其分配為做一次試驗且成功機率為0.2的二項式分配（binomial distribution）。請算出 $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2}{9}$ 的期望值 $E(S^2)$ 以及 $\sum_{i=1}^{10}X_i^2$ 的變異數 $Var(\sum_{i=1}^{10}X_i^2)$，其中 $\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i}{10}$。（10分）

試題評析	考朴松與白努力分配，算是這份試卷最簡單，也是可以最快完成的。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第三回，ch6-1點估計，蘇建郎編撰，頁5、9、23。

答：

(一)朴松分配參數 λ 之MLE為 $\overline{X}$，由MLE不變性得 $\sqrt{\lambda}$ MLE為 $\sqrt{\overline{X}}$

題目所資訊得 $\overline{x}=400$，$\sqrt{\lambda}$ 估計值為 20。

(二)

$X_i \overset{iid}{\sim} B(n=1, p=0.2)=ber(p=0.2)$，$E(X^k)=0.2$，$k \in$ □

$E(S^2)=\sigma^2=p(1-p)=0.16$ (不偏估計)

$$Var(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2=0.2-0.2^2=0.16$$

$$Var(\sum_{i=1}^{10}X_i)=10Var(X)=1.6$$ (獨立相同分配)

四、以下是關於卡方檢定（chi-squared test）以及單因子變異數分析法（one-way ANOVA）的問題。（每小題10分，共20分）

(一)在一次有3位總統候選人的總統大選，某電視名嘴宣稱候選人甲的支持率為 $p_1=0.425$，候選人乙的支持率為 $p_2=0.235$，候選人丙的支持率為 $p_3=0.115$，而不表態或都不支持這3位候選人的比率為 $p_4=0.225$。某一民調單位得到以下樣本數為1000的問卷結果：支持候選人甲的人數為450人，支持候選人乙的人數為225人，支持候選人丙的人數為125人，不表態或者都不支持這3位候選人的人數為200人。根據這份問卷，在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，請利用卡方檢定（chi-squared test）來驗證此名嘴的說法是否與該民調單位調查結果一致，即檢定

H_0 ： $p_1=0.425$ ， $p_2=0.235$ ， $p_3=0.115$ ， $p_4=0.225$

對

H_0 ： p_1 ， p_2 ， p_3 以及 p_4 並非

$p_1=0.425$ ， $p_2=0.235$ ， $p_3=0.115$ ， $p_4=0.225$

(二)一機械零件生產公司欲比較其3條生產線所生產之零件的平均規格（分別為 μ_1，μ_2 以及 μ_3）是否一致。此公司在每一條生產線各取得5件隨機樣本，這3組樣本其規格之平均值分別為3.6，3.4以及4.1。另外，這總共15件零件其規格之變異數為0.14。在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，請利用單因子變異數分析法（one-way ANOVA）來檢定這三條生產線所生產零件的平均規格是否一致，即檢定 H_0 ： $\mu_1=\mu_2=\mu_3$ 對 H_1 ： μ_1，μ_2 以及 μ_3 並不完全相等。

試題評析	考卡方檢定與單因子變異數分析都算是基本題，但要花點時間完成，記得好好檢查是否有筆誤或計算錯誤。
考點命中	1.《高點・高上統計學講義》第四回，ch10-1卡方適合度檢定，蘇建郎編撰，頁30。 2.《高點・高上統計學講義》第四回，ch08-2完全隨機設計與多重比較，蘇建郎編撰，頁7。

答：

(一)

①

$H_0: p_1=0.425, p_2=0.235, p_3=0.115, p_4=0.225$

H_1: not H_0

②

	甲	乙	丙	不表態	合計
p	0.425	0.235	0.115	0.225	1
o	450	225	125	200	1000
e	425	235	115	225	1000

檢定統計量 $\chi^2=\sum_{i=1}^{4}\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}=\frac{(450-425)^2}{425}+\cdots+\frac{(200-225)^2}{225}=5.5435$

③ $\alpha=0.05$，拒絕域 $C=\left\{\chi^2 \mid \chi^2>\chi^2_{0.05}(3)=7.814725\right\}$

$\chi^2\notin C$, $don't\ reject\ H_0$

④故在顯著水準 $\alpha=0.05$ 的情況下，根據樣本資料顯示，我們沒有證據說名嘴宣稱有誤，即其說法與民調單位結果一致。

(二)

① $\begin{cases}H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_3\\ H_1:not\ H_0\end{cases}$

②

$0.14=\sigma^2=\frac{SSTO}{N-1}\Rightarrow SSTO=1.96$, $\bar{X}_{..}=\frac{3.6+3.4+4.1}{3}=3.7$

$SStr=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{..})^2=5\times[(3.6-3.7)^2+(3.4-3.7)^2+(4.1-3.7)^2]=1.3$

$SSE=SSTO-SStr=1.96-1.3=0.66$

ANOVA table

Source	SS	df	MS	F^*
處理	1.3	2	0.65	11.818
誤差	0.66	12	0.055	
合計	1.96	14		

③ $\alpha=0.05$, $C=\{F^* \mid F^*>F_{0.05}(2,12)=3.89\}$, $F^*=11.818\in C$

$reject\ H_0$

④故在 $\alpha=0.05$ 情況下，根據樣本資料顯示，我們有證據說 μ_i 不完全相等，即三條生產線所生產零件規格一致之假設成立。

五、以下是關於無母數統計以及母體平均與比率的問題。

(一)對以下來自可能非常態分配母體且樣本數少的隨機樣本

14	18	23	25	32	48	11

當使用威爾考森符號等級檢定法（Wilcoxon signed rank test）來檢定母體中位數M是否為20，即檢定 H_0：M＝20對 H_1：M≠20，請算出分別對應正負符號的兩檢定統計量。（5分）

(二)某收視率調查公司對某電視節目收視率p進行調查，該公司做出兩份利用隨機抽樣所得之收視率報告，其中一份樣本數為400，而另一份樣本數為1600，且兩份報告所得之估計收視率相同且都不超過30%，其中估計收視率即樣本中收看此節目觀眾數占樣本數之比率，也就是樣本比率（sample proportion）。而兩份報告關於收視率p的兩個95%信賴區間，其中較長的信賴區間比另一信賴區間長度長0.0294。試求這兩份報告所得之估計收視率以及收視率p的兩個95%信賴區間。（10分）

(三)市售某品牌防彈咖啡號稱喝一個月後有減重效果。若 μ_2 是喝此防彈咖啡一個月後消費者之平均體重，而 μ_1 是這些消費者喝之前之平均體重，從這些防彈咖啡的消費者，隨機得到以下6組成對樣本（paired samples or matched samples）資料

(x_1,y_1) =(63, 61)	(x_2,y_2) =(69, 67)	(x_3,y_3) =(59, 60)	(x_4,y_4) =(57, 58)	(x_5,y_5) =(76, 70)	(x_6,y_6) =(63, 59)

其中 x_i 為第i個消費者喝此防彈咖啡前所測之體重，而 y_i 為這個消費者喝了此防彈咖啡一個月後所測之體重，i=1,...,6。在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，請利用成對樣本t檢定法（paired samples t test or matched samples t test）決定是否有足夠證據顯示此防彈咖啡有該公司宣稱的減重效果，即檢定 H_0：$\mu_1 \le \mu_2$ 對 H_1：$\mu_1 > \mu_2$。（10分）

試題評析	此題有3小題，第1小題考無母數威爾考森等級符號無母數算正負統計量而已；第2小題題目數字出的不好，但考法很有創意，估計老師在出題時沒想到學生可以用的計算工具，只有卡西歐fx-82；第3小題簡單題，成對母體檢定。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第三回，ch07-2檢定統計量法決策準則，蘇建郎編撰，頁54、77。

答：

(一)

	14	18	23	25	32	48
x-20	-6	-2	3	5	12	28
rank	4	1	2	3	5	6

$W^+ = 2+3+5+6 = 16$，$W^- = 1+4 = 5$

(二) x_1 為樣本400收看此節目之人數；x_2 為樣本1600收看此節目之人數

兩份報告估計收視相同 $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$

相同信心與點估計下，樣本數少信賴區間長的會比較寬

$$2\times z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}} - 2\times z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_2}} = 0.0249$$

$$\Rightarrow \frac{2\times 1.96}{20}\sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)} - \frac{2\times 1.96}{40}\sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)} = 0.0249$$

$$\Rightarrow \frac{49}{500}\sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)} = 0.0249 \Rightarrow \sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)} = 0.0249\times\frac{500}{49} = 0.2541$$

$$\Rightarrow \hat{p}_1(1-\hat{p}_1) = 0.065 \Rightarrow \hat{p}_1 = 0.07$$

樣本400下95%信賴區間

$$\hat{p}_1 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}} = 0.07 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.07\times 0.93}{400}} = (0.045, 0.095)$$

樣本1600下95%信賴區間

$$\hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = 0.07 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.07\times 0.93}{1600}} = (0.0575, 0.0825)$$

(三)

μ_1 消費者喝防彈咖啡前平均體重；μ_2 消費者喝防彈咖啡前平均體重

令 $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$。

$$① \begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 \le 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0: \mu_d \le 0 \\ H_1: \mu_d > 0 \end{cases},\quad \alpha = 0.05$$

	1	2	3	4	5	6
x	63	69	59	57	76	63
y	61	67	60	58	70	59
d	2	2	-1	-1	6	4

$n=6$，$\bar{d}=2$，$s_d^2=7.6$

② $t^*=\dfrac{\bar{d}-c}{s_d/\sqrt{n}}=\dfrac{2-0}{\sqrt{7.6/6}}=1.78$

③ $\alpha=0.05$，$C=\{t^* \mid t^*>t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(5)=2.015\}$

$t^*=1.78\notin C$， $don't\ reject\ H_0$

④故在顯著水準$\alpha=0.05$的情況下，根據樣本資料顯示，我們沒有證據說$\mu_1>\mu_2$，即喝防彈咖啡對減重無效。