

《統計學概要》

一、某次國營事業單位招聘人員考試報考人數共計2500人，若已知考試成績 X 呈現平均數為 μ ，標準差為 σ 的常態分配，即 $X \sim N(\mu, \sigma)$ ，且考試成績之第二四分位數 $Q_2 = 63.25$ 分及第三四分位數 $Q_3 = 72.5$ 分，請依據上面之訊息，試求：

- (一)母體平均數 $\mu = ?$ (4分)
- (二)第一四分位數 $Q_1 = ?$ (6分)
- (三)母體標準差為 $\sigma = ?$ (8分)
- (四)約有多少應考人成績高於80分？(8分)

試題評析 本題是常態分配之機率計算題，考生只要小心計算，獲得高分應該不難。

考點命中 《高點·高上統計學講義》第二回，趙治勳編撰，第七章。

答：

(一)由於常態分配為對稱分配， $\mu = \text{median} = Q_2 = 63.25$

(二)由於常態分配為對稱分配

$$Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_2 \Rightarrow 63.25 - Q_1 = 72.5 - 63.25 \Rightarrow Q_1 = 54$$

$$(三) P(X \geq 72.5) = P(Z \geq \frac{72.5 - 63.25}{\sigma}) = 0.75$$

$$\Rightarrow \frac{72.5 - 63.25}{\sigma} = z_{0.25} = 0.68 \Rightarrow \sigma = 13.6029$$

$$(四) P(X \geq 80) = P(Z \geq \frac{80 - 63.25}{13.6029}) = P(Z \geq 1.23) = 0.1093$$

二、臺北市 A 公車站每隔5分鐘就有一輛公車到站，乘客到達車站的任一時刻是均勻分配，若令隨機變數 X 為乘客到達車站後等待公車到達的候車時間，試求：

- (一)請寫出隨機變數 X 的機率分配 $f(x)$ 為何？(6分)
- (二)乘客到達車站後等待公車到達的候車時間不超過3分鐘的機率為何？(6分)
- (三)若乘客甲、乙、丙三人分別獨立地在 A 車站等1、2、3路公車，則三人中至少有兩人等待公車到達的候車時間不超過2分鐘的機率為何？(10分)

試題評析 本題是在考均勻分配與三項分配之機率計算題，相關題型講義或考古題甚多，獲得高分應該不難。

考點命中 《高點·高上統計學講義》第二回，趙治勳編撰，第六章與第七章。

答：

(一) $X \sim \text{Unifrom}(0,5)$ (單位:分鐘)

$$f_X(x) = \frac{1}{5}, 0 < x < 5$$

$$(二) P(X \leq 3) = \int_0^3 \frac{1}{5} dx = \frac{3}{5}$$

(三)令 Y 表等車時間不超過2分鐘之人數

$$Y \sim \text{Bin}(n=3, p = P(X \leq 2) = \frac{2}{5})$$

$$P(Y \geq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 3) = 0.352$$

三、一個袋子中裝有5顆大小、重量均相同的小球，其中4顆為紅球，1顆為白球，今每次從袋子中隨機抽出1顆球，且抽後不放回，連續抽取2次，令隨機變數

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若第1次抽到的為紅球} \\ 0, & \text{若第1次抽到的為白球} \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, & \text{若第2次抽到的為紅球} \\ 0, & \text{若第2次抽到的為白球} \end{cases}, \text{則：}$$

(一)請寫出 (X, Y) 的可能結果。(6分)

(二)隨機變數 X 與 Y 的聯合間斷機率分配 $f(x, y)$ 為何?(8分)

(三) $P(X \geq Y) = ?$ (8分)

試題評析 本題考兩個隨機變數之聯合機率函數，相關題型考古題甚多，獲得高分應該不難。

考點命中 《高點·高上統計學講義》第一回，趙治勳編撰，第五章。

答：

(一) $(X, Y) = (0, 1)$ 或 $(1, 0)$ 或 $(1, 1)$

(二)

$f_{XY}(x, y)$		Y	
		0	1
X	0	0	$\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$
	1	$\frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$

$$(三) P(X \geq Y) = P((X, Y) = (1, 0)) + P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

四、某公司有甲、乙、丙三家汽車軸承工廠，每廠每天生產軸承量合乎常態分配，公司總經理分別由甲、乙、丙三家工廠隨機各抽取10天的汽車軸承生產量資料，經初步統計得下列資料結果（軸承生產量之樣本平均數 (\bar{x}_i) 與軸承生產量之樣本標準差 (s_i) ）：（每小題10分，共30分）

樣本數 (n_i)		軸承生產量之樣本平均數 (\bar{x}_i)	軸承生產量之樣本標準差 (s_i)
甲廠	10	26.5	4
乙廠	10	18.7	5
丙廠	10	22.6	5

(一)求該公司平均每天的汽車軸承生產量是多少？

(二)若甲、乙兩廠每天生產汽車軸承生產量的變異數相等，試取顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，檢定甲、乙兩廠平均每天汽車軸承生產量是否相等？

(三)若甲、乙、丙三廠每天生產汽車軸承生產量的變異數相等，試取顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，檢定甲、乙、丙三廠平均每天汽車軸承生產量是否相等？

試題評析 本題考到兩個假設檢定，一個是兩獨立母體之平均數檢定，另一個是變異數分析，講義中也有收錄相關題型，考生只要小心計算，獲得高分應該不難。

考點命中 《高點·高上統計學講義》第一回，趙治勳編著，第十一章與第十二章。

答：

$$(一) \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^3 \bar{X}_i}{3} = \frac{26.5 + 18.7 + 22.6}{3} = 22.6 \text{ (台)}$$

(二) 令 X_1, X_2 分別表甲、乙兩廠之產量

$$\text{母體： } X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2) \perp X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$$

$$\text{樣本： } X_{11}, X_{12}, \dots, X_{110} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma^2) \quad X_{21}, X_{22}, \dots, X_{210} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma^2)$$

$$\text{點估計： } \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}))$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\text{T.S.: } T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (0)}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{10} + \frac{1}{10})}} \sim t_{(10+10-2=18)} \text{ 其中 } S_p^2 = \frac{(10-1)S_1^2 + (10-1)S_2^2}{10+10-2} = 20.5$$

$$\text{R.R.: Reject } H_0 \text{ at } \alpha = 0.05 \text{ if } |T^*| > t_{0.025(18)} = 2.1$$

$$\therefore T = \frac{(26.5 - 18.7) - (0)}{\sqrt{20.5(\frac{1}{10} + \frac{1}{10})}} = 3.8521 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

結論：我們有足夠證據去推論甲、乙兩廠之產量不相等。

(三) 假設模型： $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, 10$

ANOVA TABLE				
Source	SS	d.f.	MS	F
工廠	304.2	2	152.1	$F^* = 6.9136$
Error	594	27	22	
Total	898.2	29		

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \text{ vs } H_1: \text{至少一個 } \mu_i \neq \mu_j, i \neq j$$

$$\text{T.S.: } F = \frac{MSR}{MSE} \sim F_{(2,27)}$$

$$\text{R.R.: Reject } H_0 \text{ at } \alpha = 0.05 \text{ if } F^* > F_{0.05(3,16)} = 3.24 \quad F^* > F_{0.05(2,27)} = 3.35$$

$$\therefore F^* = 6.9136 \quad \therefore \text{reject } H_0$$

結論：我們有足夠證據去推論甲、乙、丙三廠之產量不盡相等。

【版權所有，重製必究！】