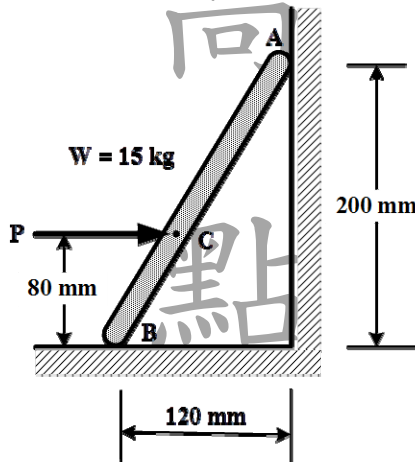


工程力學 (包括材料力學)

一、圖一為重量 15 kg 之均勻桿件 AB ，由水平力 P 維持在地面 B 點及垂直牆面 A 點上，不發生滑動，已知桿件與地面靜摩擦係數 μ_B 為 0.25 ，與牆面靜摩擦係數 μ_A 為 0.20 ，重力加速度 $g = 9.81 \text{ N/kg} = 9.81 \text{ m/s}^2$ ，試回答下列問題：

(一) P 力最小值 P_{\min} 應為何？ (15 分)

(二) P 力最大值 P_{\max} 應為何？ (10 分)

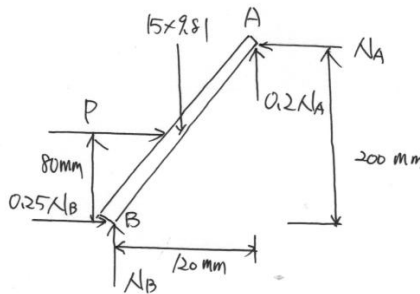


圖一
建

試題評析	屬於摩擦動態未明基本題型。
考點命中	《高點建國土木突破靜力學》P3-34、範例14。

解：

(1) 求 P_{\min} ? $\Rightarrow A$ 處即將向下滑動, B 處即將向左滑動.



$$\therefore \sum F_x = 0 \leftarrow \pm$$

$$\therefore N_A - 0.25N_B - P = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \sum F_y = 0, \uparrow$$

$$\therefore 0.2N_A + N_B - 15 \times 981 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\therefore \sum M_B = 0, \curvearrowright$$

$$\therefore N_A(200) + 0.2N_A(20) - 15 \times 981 \times (60) - P(80) = 0 \quad \text{--- (3)}$$

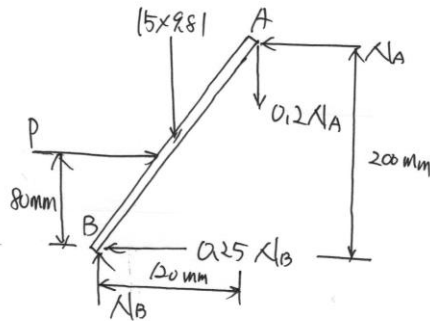
\(\therefore\) 由 (1), (2), (3) 式得,

$$P = 236 \text{ (N)}$$

$$N_A = 4204 \text{ (N)}$$

$$N_B = 135.74 \text{ (N)}$$

(2) 求 $P_{\max} = ?$ A 點即將往上滑動, B 點即將往右滑動:



$$\therefore \sum F_x = 0, \leftarrow$$

$$N_A + 0.25 N_B - P = 0 \quad \text{--- (4)}$$

$$\therefore \sum F_y = 0, \uparrow$$

$$\therefore -0.2 N_A + N_B - 15 \times 981 = 0 \quad \text{--- (5)}$$

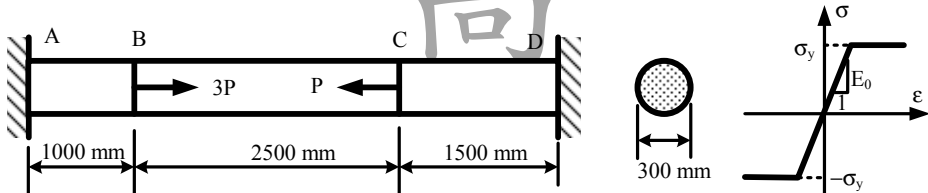
$$\therefore \sum M_B = 0, \curvearrowright$$

$$\therefore N_A(200) - 0.2 N_A(20) - 15 \times 981 \times (60) - P(80) = 0 \quad \text{--- (6)}$$

二、圖二為圓形均勻斷面（直徑 300 mm）梁 ABCD，長為 5000 mm，兩端 A 及 D 點固定，在 B 點及 C 點分別承受 3P 及 P 集中載重，梁彈性模數 $E_0 = 200 \text{ GPa}$ ，抗拉及抗壓降伏強度均為 $\sigma_y = 180 \text{ MPa}$ ，假設不計此梁自重，試回答下列問題：

(一)在此梁尚未發生任何降伏前，P 力之最大載重 P_{\max} 為何？（15 分）

(二)在 $P = P_{\max}$ 時，B 點位移、C 點位移及梁 BC 段之變形量各為何？（10 分）



圖二

試題評析	本題屬簡單的軸力桿件靜不定分析，先將各桿件軸力算出來後就可以算出最大載重 P_{\max} 值，再依據各桿件伸縮量值即可算出各點位移值，上課教過好多遍了啊！
考點命中	《高點建國土木材料力學講義》第二回，例題 10.1.1。 《國考材料力學精解》，例題 10.1.10。

解：

(一)求最大載重 P_{\max}

1. 先設贅力並計算支承反力及各桿軸力

此為 1 度 靜不定軸力桿件，取 A 點反力 R_A (←) 為贅力，D 點反力 $R_D = 2P - R_A$ (←)。

桿件 AB 段軸力 $S_{AB} = R_A$

桿件 BC 段軸力 $S_{BC} = R_A - 3P$

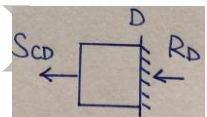
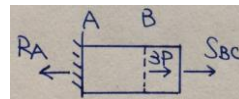
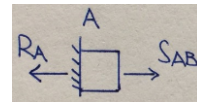
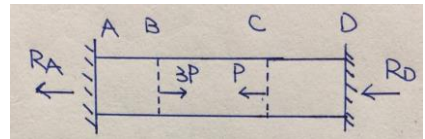
桿件 CD 段軸力 $S_{CD} = -R_D = R_A - 2P$

2. 計算各桿件伸縮量

$$\text{桿件 AB 段伸縮量 } \delta_{AB} = \frac{S_{AB}L_{AB}}{AE_0} = \frac{R_A(1000)}{AE_0}$$

$$\text{桿件 BC 段伸縮量 } \delta_{BC} = \frac{S_{BC}L_{BC}}{AE_0} = \frac{(R_A - 3P)(2500)}{AE_0}$$

$$\text{桿件 CD 段伸縮量 } \delta_{CD} = \frac{S_{CD}L_{CD}}{AE_0} = \frac{(R_A - 2P)(1500)}{AE_0}$$



3. 列出變形諧和條件解出贅力並計算各桿力

由桿件總伸縮量為零，可寫出：

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = 0 \Rightarrow \frac{(5000R_A - 10500P)}{AE_0} = 0$$

可解出A點反力 $R_A = 2.1P$ (←)，將 R_A 代回可得到各桿件力量：

桿件AB段軸力 $S_{AB} = 2.1P$ (拉力)

桿件BC段軸力 $S_{BC} = -0.9P$ (壓力)

桿件CD段軸力 $S_{CD} = 0.1P$ (拉力)

4. 計算最大載重 P_{\max}

題目已述拉壓降伏強度相同，且各桿件斷面積為定值，又桿件AB段承受最大軸力，因此AB段會率先達到降伏狀態，故最大載重會率先發生在桿件AB段。令桿件AB段應力 σ_{AB} 恰達降伏應力 σ_y ，可算出最大載重 P_{\max} ：

$$\text{斷面積 } A = \frac{\pi}{4}(300)^2 = 70.686 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{AB} = \frac{S_{AB}}{A} = \frac{2.1P_{\max}}{A} = \sigma_y$$

$$\Rightarrow P_{\max} = \frac{A\sigma_y}{2.1} = \frac{(70.686 \times 10^3)(180)}{2.1} = 6.059 \times 10^6 \text{ N} = \underline{6059 \text{ kN}}$$

(二) 計算 $P = P_{\max}$ 下B點位移 Δ_B 、C點位移 Δ_C 與梁BC段變形量 δ_{BC}

$$\text{桿件AB段伸縮量 } \delta_{AB} = \frac{S_{AB}L_{AB}}{AE_0} = \frac{(2.1 \times 6.059 \times 10^6)(1000)}{(70.686 \times 10^3)(200 \times 10^3)} = 0.900 \text{ mm}$$

$$\text{桿件BC段伸縮量 } \delta_{BC} = \frac{S_{BC}L_{BC}}{AE_0} = \frac{(-0.9 \times 6.059 \times 10^6)(2500)}{(70.686 \times 10^3)(200 \times 10^3)} = -0.964 \text{ mm}$$

$$\text{桿件CD段伸縮量 } \delta_{CD} = \frac{S_{CD}L_{CD}}{AE_0} = \frac{(0.1 \times 6.059 \times 10^6)(1500)}{(70.686 \times 10^3)(200 \times 10^3)} = 0.064 \text{ mm}$$

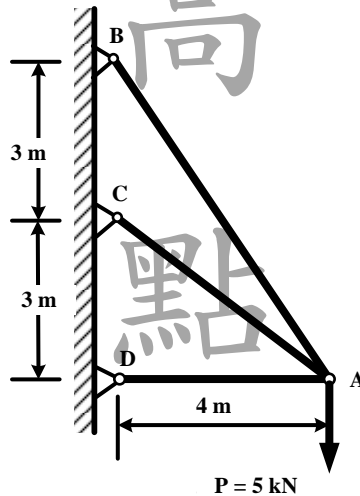
$$\text{B點位移量 } \Delta_B = \delta_{AB} = \underline{0.900 \text{ mm}} \text{ (→)}$$

$$\text{C點位移量 } \Delta_C = \delta_{CD} = \underline{0.064 \text{ mm}} \text{ (←)}$$

$$\text{桿件BC段變形量 } \delta_{BC} = \underline{-0.964 \text{ mm}} \text{ (縮短)}$$

三、圖三為桿件 AB、AC 及 AD 鉸接 (hinged) 在 A、B、C 及 D 四點，在 A 點承受一垂直載重 $P = 5 \text{ kN}$ ，已知各桿件之截面積 A_0 均為 100 mm^2 ，彈性模數 E 均為 80 GPa ，假設各桿件重量可忽略不計，試回答下列問題：

- (一) 桿件 AB、AC 及 AD 所承受力量各為何？(15 分)
 (二) A 點之垂直及水平位移各為何？(10 分)



圖三

試題評析	老師在講您有沒有再聽？三桿桁架就是最常見的題目啊！上課已經講到爛掉了，考出來一定要得分啊！題目沒有指定任何方法，就選一個您最拿手方法進行解題吧！
考點命中	《高點建國土木材料力學講義》第一回，例題2.4.3。 《高點建國土木材料力學講義》第一回，練習2.5。 《國考材料力學精解》，例題2.3.2。

解：

(一) 計算桿件 AB、AC 與 AD 所受力量

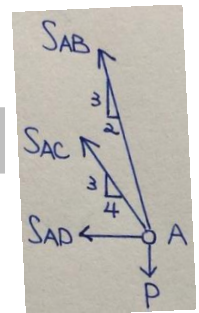
1. 先設贅力並計算支承反力及各桿軸力

此為 1 度靜不定軸力桿件，取 AD 桿件軸力 S_{AD} 為贅力。由「節點法」求出桿件 AC 和桿件 AB 內力：

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S_{AD} + \frac{4}{5} S_{AC} + \frac{2}{\sqrt{13}} S_{AB} = 0 \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3}{5} S_{AC} + \frac{3}{\sqrt{13}} S_{AB} = P \dots (2)$$

$$\text{由(1)及(2)可解出 } S_{AC} = -\frac{5}{2} S_{AD} - \frac{5P}{3}, S_{AB} = \frac{\sqrt{13}}{2} S_{AD} + \frac{2\sqrt{13}P}{3}$$



2. 由單位力法解出贅力

採用單位力法解贅力 S_{AD} ：

$$\Rightarrow 1 \times 0 = \frac{1}{A_0 E} \left[(S_{AD})(1)(4) + \left(-\frac{5}{2} S_{AD} - \frac{5P}{3} \right) \left(\frac{5}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{13}}{2} S_{AD} + \frac{2\sqrt{13}P}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right) (\sqrt{52}) \right]$$

$$\text{可解贅力 } S_{AD} = -0.887P = -0.887(5) = \underline{-4.437 \text{ kN (壓力)}}$$

將 S_{AD} 代回可得AC桿及AB桿軸力 $S_{AC} = 2.759 \text{ kN (拉力)}$ ， $S_{AB} = 4.020 \text{ kN (拉力)}$

(二) 求A點垂直與水平位移

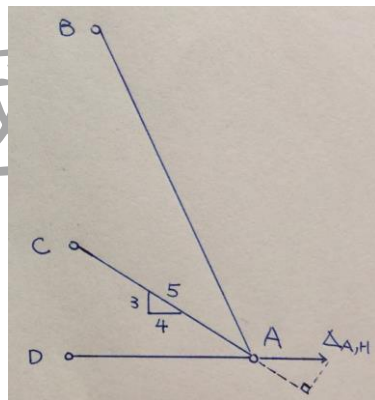
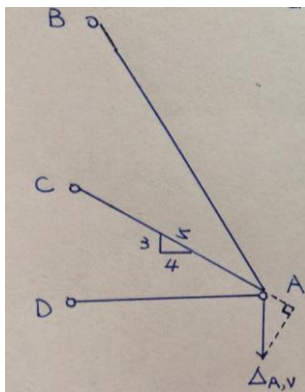
$$\text{桿件AD段伸縮量 } \delta_{AD} = \frac{S_{AD} L_{AD}}{A_0 E} = \frac{(-4.437 \times 10^3)(4 \times 10^3)}{(100)(80 \times 10^3)} = -2.2185 \text{ mm}$$

$$\text{桿件AC段伸縮量 } \delta_{AC} = \frac{S_{AC} L_{AC}}{A_0 E} = \frac{(2.759 \times 10^3)(5 \times 10^3)}{(100)(80 \times 10^3)} = 1.724 \text{ mm}$$

依據維氏圖求出A點垂直 $\Delta_{A,V}$ 與水平位移 $\Delta_{A,H}$ ：

$$\delta_{AD} = \Delta_{A,H} \Rightarrow \text{A點水平位移 } \underline{\Delta_{A,H} = -2.2185 \text{ mm (←)}}$$

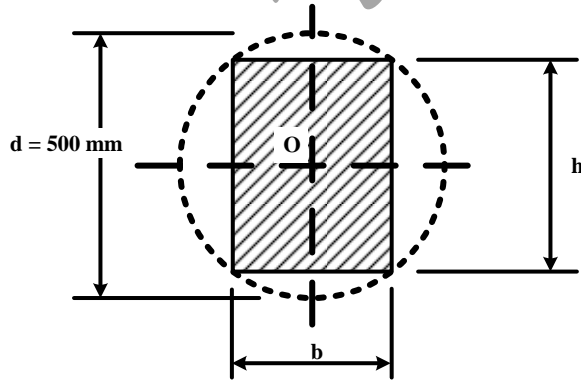
$$\delta_{AC} = \Delta_{A,V} \times \frac{3}{5} + \Delta_{A,H} \times \frac{4}{5} \Rightarrow \text{A點垂直位移 } \underline{\Delta_{A,V} = 5.831 \text{ mm (↓)}}$$



【版權所有，翻印必究】

四、某工程原規劃使用一支直徑 $d = 500 \text{ mm}$ 圓形斷面石材作為大梁，但考量節省空間及節省材料，擬將此圓形斷面石材改成寬為 b 及高為 h 內接圓形之矩形斷面梁，如圖四所示，試回答下列問題：

- (一)如須將圓形斷面石材製成能抵抗彎矩之最強矩形斷面梁，則最佳之 b 值與 h 值應各為何？(15 分)
- (二)此最強矩形斷面梁撓曲應力為原圓形斷面石材撓曲應力之多少倍？材料可節省多少百分比？(10 分)



圖四

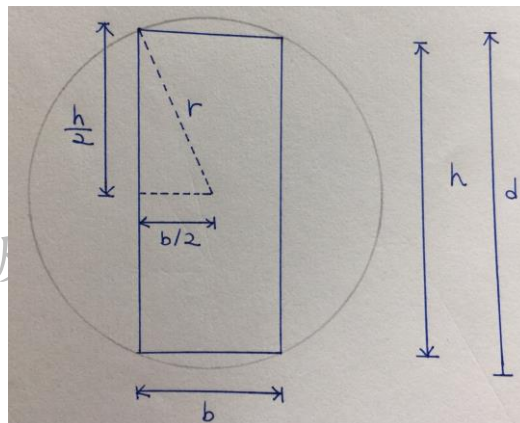
試題評析	乍看之下似乎是很難下手，但仔細剖析後只要先將寬度 b 和深度 h 關係寫出來後，再利用微分求極值觀念便可迎刃而解，算是很創意的出法，類似於93年台科研究所考試題目喔！
考點命中	《高點建國土木材料力學講義》第一回，例題4.1.1。

解：

Ans:

(一)求最佳 b 值與 h 值

依據幾何關係可以得到 b 與 h 關係：



$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = r = 250 \Rightarrow \frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4} = 62500 \Rightarrow h^2 = 250000 - b^2$$

$$\text{矩形斷面斷面模數 } S_{\text{矩形}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(250000 - b^2)}{6} = \frac{250000b - b^3}{6}$$

欲求出最佳抗彎矩斷面，即是找出最強矩形斷面模數 $S_{\text{矩形}}$ ，利用函數微分求極值觀念可算出最佳 b 值：

$$\frac{d(S_{\text{矩形}})}{db} = 0 \Rightarrow -3b^2 + 250000 = 0 \Rightarrow \text{可解出矩形梁寬度 } b = 288.675 \text{ mm}$$

$$\text{矩形梁深度 } h = \sqrt{250000 - b^2} = \sqrt{250000 - 288.675^2} = 408.248 \text{ mm}$$

(二) 矩形斷面與圓形斷面撓曲應力比值與其材料減少百分比

$$\text{矩形斷面斷面模數 } S_{\text{矩形}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{250000(288.675) - (288.675)^3}{6} = 8018753.739 \text{ mm}^3$$

$$\text{圓形斷面斷面模數 } S_{\text{圓形}} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi(500)^3}{32} \text{ mm}^3$$

$$\frac{\sigma_{\text{矩形}}}{\sigma_{\text{圓形}}} = \frac{S_{\text{圓形}}}{S_{\text{矩形}}} = \frac{\frac{\pi(500)^3}{32}}{8018753.739} = 1.53$$

這代表使用最強矩形斷面梁可以承受之外力為原圓形斷面之 1.53 倍。

$$A_{\text{矩形}} = bh = (288.675)(408.248) = 117850.991 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{圓形}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(500)^2}{4} = 196349.541 \text{ mm}^2$$

$$\text{材料減少百分比} = \left(\frac{A_{\text{圓形}} - A_{\text{矩形}}}{A_{\text{圓形}}} \right) \times 100\% = \left(\frac{196349.541 - 117850.991}{196349.541} \right) \times 100\%$$

$$\Rightarrow \text{材料減少百分比} = 39.979\%$$