測量學

一、試說明水準儀望遠鏡視準軸應與水準管水準軸平行的檢驗原理，並列出傾斜角之計算公式及繪圖說明其對水準測量時前後視距離不同時之影響。(25分)

試題評析	本題為水準儀檢測中定樁法的另一種考法，應由定樁法切入思考。
考點命中	《高點建國土木測量學講義》第三章水準測量之檢校

解：

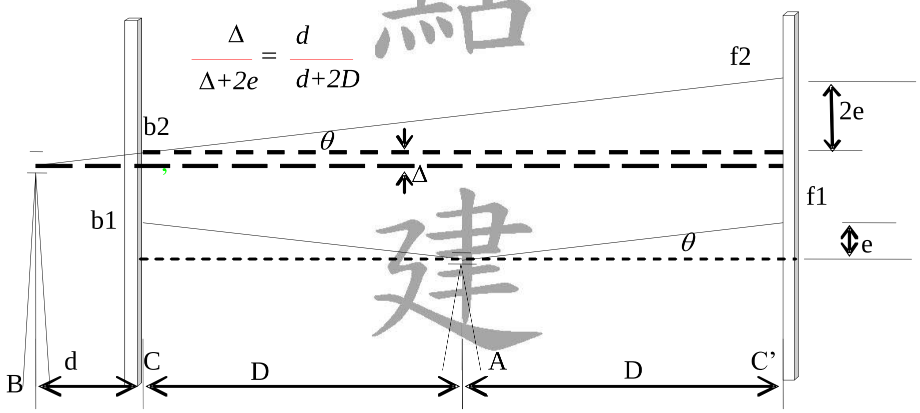
(一)

視準軸應與水準軸平行且與直立軸垂直，如此在鏡頭水平旋轉時才可得到一致高度的水平視線。

倘若視準軸與水準軸不平行，傾斜之讀數與水平讀數之偏差量與距離成正比。此為檢核之原理，亦為水準儀定樁法之計算基礎。

(二)

以下圖為例，說明如下:



(1)若視準軸與水準軸不平行(假設上仰θ角)，讀數包含視準軸誤差，計算兩尺位置的高程差是有誤差的。

(2)當水準儀與兩尺之距離相同，則兩尺讀數所包含視準軸誤差相同，求解之兩尺間高程差$\triangle h=b_1-f_1=(b_0+e)-(f_0+e)=b_0-f_0$，此高程差$\triangle h$為正確之兩尺間高程差。

其中b_1與f_1為包含視準軸誤差之讀數

b_0與f_0為無視準軸誤差之讀數

(3)當水準儀至於後尺後方距離d之位置，兩尺讀數所包含視準軸誤差可由相似三角形推算其間的比例關係。

若後尺讀數所含之視準軸誤差為Δ，則前尺讀數所包含的視準軸誤差為$\Delta+2e$，求解之兩尺間高程差$\triangle h'=b_2-f_2=(b_0+\Delta)-(f_0+\Delta+2e)=b_0-f_0+2e=\triangle h+2e$

其中b_2與f_2為包含視準軸誤差之讀數

b_0與f_0為無視準軸誤差之讀數

比較$\triangle h$與$\triangle h'$兩數據之差，即可求得視準軸誤差。

視準軸誤差的偏差角度$\theta=\tan^{-1}(\frac{e}{D})$則可求得。

視準軸誤差的影響，與距離成正比。

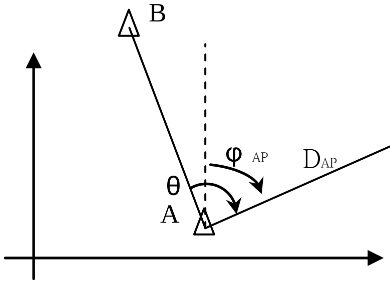
二、試繪圖說明在已知點架設全站儀利用輻射導線法(Radial Traversing)測定任意地面特徵點並計算其三維坐標之施測步驟與計算公式。(25分)

試題評析	此為坐標系統與三角高程之合併考題，也是地形測量之應用。
考點命中	《高點建國土木測量學講義》第五章坐標系統之應用、第三章高之三角高程。

解：

平面坐標與高程值須分別計算。

(一)求解P點平面座標



AB為可通視之已知點，可計算φ_{AB}

於A點架設全站儀，後視B點、前視任意P點，記錄水平角度θ與距離D_{AP}。

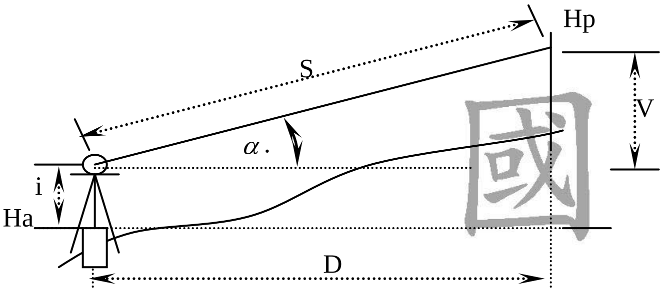
(本題提供全測站儀，視為可測斜距S、亦可直接計算水平距。

若施測之距離為斜距S_{AP}，則可利用垂直角α數據換算為水平距$D_{AP}= S_{AP}\times\cos(\alpha)$)

水平角度θ可換算方位角$\varphi_{AP}=\varphi_{AB}+\theta$

光線法方程式$\begin{cases} X_P=X_A+\Delta X_{AP}=X_A+D_{AP}\cdot\sin\phi_{\overline{AP}} \\ Y_P=Y_A+\Delta Y_{AP}=Y_A+D_{AP}\cdot\cos\phi_{\overline{AP}} \end{cases}$可求得P點坐標

(二)求解P點高程



本題提供全測站儀，視為可測斜距S。

量測A點之儀器高(i)

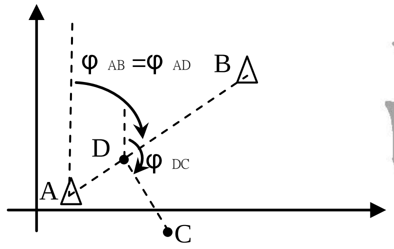
照準P點得到天頂距，再換算成仰(俯)角α(務必正倒鏡觀測取平均或定得指標差"I"加以改正)

公式:
$$V=S\sin\alpha$$
$$H_p=H_a+i+V$$

三、於二維平面直角坐標系統(E,N)中，已知A、B二點之坐標分別為(20.00,10.00)、(100.00,70.00)(單位：m)，於AB直線上二點之間以皮卷尺測得D點及其右側垂直方向上C點之支距離分別為 $\overline{\mathrm{AD}} = 30.00 \pm 0.05\ m$ 、$\overline{\mathrm{DC}} = 40.00 \pm 0.05\ m$ ，若垂直角之觀測中誤差為 $\sigma_\alpha = \pm 10''$，試計算D點、C點之平面坐標及其誤差為何？(25分)

試題評析	此題為方位角與距離正算坐標之應用
考點命中	《高點建國土木測量學講義》第五章坐標系統之應用

解：



(一)求解D點坐標

採用 $\begin{cases} X_{\mathrm{D}} = X_A + \Delta X_{\mathrm{AD}} = X_A + D_{\mathrm{AD}} \cdot \sin\phi_{\overline{AD}} \\ Y_{\mathrm{D}} = Y_A + \Delta Y_{\mathrm{AD}} = Y_A + D_{AD} \cdot \cos\phi_{\overline{AD}} \end{cases}$ 方程式計算坐標

由AB坐標可計算，$\triangle X_{AB}$=80、$\triangle Y_{AB}$ =60

$\varphi_{\mathrm{AB}} = \tan^{-1}(\dfrac{\Delta X_{AB}}{\Delta Y_{AB}}) = \varphi_{\mathrm{AD}}$ =53°07’48”，已量測D_{AD}=30

因此 $\begin{cases} X_{\mathrm{D}} = 20 + 30 \cdot \sin(\varphi_{\mathrm{AD}}) = 44 \\ Y_{\mathrm{D}} = 10 + 30 \cdot \cos(\varphi_{\mathrm{AD}}) = 28 \end{cases}$

(二)求解D點坐標精度

誤差傳播 $\begin{cases} M_{X_D}^2 = M_{X_A}^2 + (\sin\varphi_{\overline{AD}})^2 \cdot M_{D_{AD}}^2 + (D_{AD} \cdot \cos\varphi_{\overline{AD}})^2 \cdot (\dfrac{M_{\varphi_{AD}}}{\rho''})^2 \\ M_{Y_D}^2 = M_{Y_A}^2 + (\cos\varphi_{\overline{AD}})^2 \cdot M_{D_{AD}}^2 + (D_{AD} \cdot (-\sin\varphi_{\overline{AD}}))^2 \cdot (\dfrac{M_{\varphi_{AD}}}{\rho''})^2 \end{cases}$ 計算其誤差

(其中A點坐標視為無誤差 M_{X_A}=M_{Y_A}=0)

$$\begin{cases} M_{X_D}^2 = 0^2 + (0.8)^2 \cdot (0.05m)^2 + (30m \cdot 0.6)^2 \cdot (\dfrac{10''}{\rho''})^2 = 0.001601m^2 \\ M_{Y_D}^2 = 0^2 + (0.6)^2 \cdot (0.05m)^2 + (30m \cdot (-0.8))^2 \cdot (\dfrac{10''}{\rho''})^2 = 0.000901m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{X_D} = \pm 0.04m \\ M_{Y_D} = \pm 0.03m \end{cases}$$

(三)求解C點坐標

由前式所獲得之D點坐標解算

採用 $\begin{cases} X_C = X_D + \Delta X_{DC} = X_D + D_{DC} \cdot \sin\varphi_{\overline{DC}} \\ Y_C = Y_D + \Delta Y_{DC} = Y_D + D_{DC} \cdot \cos\varphi_{\overline{DC}} \end{cases}$ 方程式計算坐標

$\phi_{AB} = \phi_{AD}$ =53°07'48"，DC為AD之垂直方向，則 $\phi_{DC} = \phi_{AD} + 90^0$ =143°07'48"

已量測D_{DC}=40

因此 $\begin{cases} X_C = 44 + 40 \cdot \sin(\phi_{DC}) = 68 \\ Y_C = 28 + 40 \cdot \cos(\phi_{DC}) = -4 \end{cases}$

(四)求解C點坐標精度

誤差傳播 $$\begin{cases} M_{X_C}^2 = M_{X_D}^2 + (\sin\phi_{\overline{DC}})^2 \cdot M_{D_{DC}}^2 + (D_{DC} \cdot \cos\phi_{\overline{DC}})^2 \cdot (\frac{M_{\phi_{DC}}}{\rho''})^2 \\ M_{Y_C}^2 = M_{Y_D}^2 + (\cos\phi_{\overline{DC}})^2 \cdot M_{D_{DC}}^2 + (D_{DC} \cdot (-\sin\phi_{\overline{DC}}))^2 \cdot (\frac{M_{\phi_{DC}}}{\rho''})^2 \end{cases}$$ 計算其誤差

(其中D點坐標包含誤差)

$$\begin{cases} M_{X_C}^2 = (0.04m)^2 + (0.6)^2 \cdot (0.05m)^2 + (40m \cdot (-0.8))^2 \cdot (\frac{10''}{\rho''})^2 = 0.0025m^2 \\ M_{Y_C}^2 = (0.03m)^2 + (-0.8)^2 \cdot (0.05m)^2 + (40m \cdot (0.6))^2 \cdot (\frac{10''}{\rho''})^2 = 0.0025m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{X_C} = \pm 0.05m \\ M_{Y_C} = \pm 0.05m \end{cases}$$

四、在二維平面直角坐標系統(X,Y)中，已知五邊形ABCDE各角點坐標分別為A(0.00,391.78)、B(225.72,747.78)、C(616.54,592.01)、D(423.21,0.00)、E(225.10,110.00)(單位：m)，若各點平面坐標含有中誤差±0.05m，試依坐標法計算此五邊形ABCDE之面積及中誤差為何？(25分)

試題評析	本題為坐標法求面積搭配誤差傳播推導之應用
考點命中	《高點建國土木測量學講義》第11章地籍測量之坐標法面積計算

解：

坐標法面積計算之公式如下:

$$Area = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_{n-1} & N_n & N_1 \\ E_1 & E_2 & E_3 & \cdots & E_{n-1} & E_n & E_1 \end{bmatrix}$$

其中，點為坐標應依順時針(或逆時針)排序，且第一點需重複表列

對應至本題，應列式如下:

$$Area = \frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix} Y_A & Y_B & Y_C & Y_D & Y_E & Y_A \\ X_A & X_B & X_C & X_D & X_E & X_A \end{bmatrix}\right\|$$

即 $Area = 0.5 \cdot \begin{vmatrix} (Y_A \cdot X_B + Y_B \cdot X_C + Y_C \cdot X_D + Y_D \cdot X_E + Y_E \cdot X_A) \\ -(Y_B \cdot X_A + Y_C \cdot X_B + Y_D \cdot X_C + Y_E \cdot X_D + Y_A \cdot X_E) \end{vmatrix}$

即面積=265821.07M^2。

對每一個包含中誤差之變數偏微分，可得誤差傳播之計算式

$$M_{Area}^2 = 0.5^2 \cdot [(Y_E - Y_B)^2 \cdot \mathrm{M}_{X_A}^2 + (Y_A - Y_C)^2 \cdot \mathrm{M}_{X_B}^2 + (Y_B - Y_D)^2 \cdot \mathrm{M}_{X_C}^2 + (Y_C - Y_E)^2 \cdot \mathrm{M}_{X_D}^2 + (Y_D - Y_A)^2 \cdot \mathrm{M}_{X_E}^2$$
$$+ (X_B - X_E)^2 \cdot \mathrm{M}_{Y_A}^2 + (X_C - X_A)^2 \cdot \mathrm{M}_{Y_B}^2 + (X_D - X_B)^2 \cdot \mathrm{M}_{Y_C}^2 + (X_E - X_C)^2 \cdot \mathrm{M}_{Y_D}^2 + (X_A - X_D)^2 \cdot \mathrm{M}_{Y_E}^2]$$
$$M_{Area}^2 = 0.5^2 \cdot [(\text{-}637.78\mathrm{m})^2 + (\text{-}200.23\mathrm{m})^2 + (747.78\mathrm{m})^2 + (482.01\mathrm{m})^2 + (\text{-}391.78\mathrm{m})^2$$
$$+ (0.62\mathrm{m})^2 + (616.54\mathrm{m})^2 + (197.49\mathrm{m})^2 + (\text{-}391.44\mathrm{m})^2 + (\text{-}423.21\mathrm{m})^2] \cdot (0.05\mathrm{m})^2$$
$$M_{Area}^2 = 0.5^2 \cdot (2143311.7520)^2 \cdot (0.05\mathrm{m}^2)^2 = 1339.54\mathrm{m}^4$$
$$M_{Area} = \pm 36.6\mathrm{m}^2$$