

# 《資料結構》

一、(一)請說明並比較二分搜尋 (binary search) 與一般二元搜尋樹 (binary search tree) 兩者在儲存鍵值並應用來進行搜尋鍵值功能時，在“建置”與“搜尋”程序上作法與效能的差異。(13分)

(二)若有  $n$  個鍵值，以下列甲和乙兩種資料結構策略儲存：

策略甲：由小到大依序儲存在一陣列中

策略乙：以 AVL tree 架構儲存

請以 Big-O 觀念比較後續六種不同功能獨立運作時，這兩種策略何者效能較優或兩者效能相近：1. 尋找特定鍵值  $k$ ；2. 尋找排序為  $j$  的鍵值；3. 刪除特定鍵值  $k$ ；4. 刪除排序為  $j$  的鍵值；5. 插入新鍵值；6. 依序輸出所有鍵值。(12分)

試題評析	本題涉及兩種資料結構的使用之比較，二分搜尋與二元搜尋樹皆為常用的搜尋法，同時第二小題亦考到 AVL-tree 的相關時間複雜度。本題難度不高，小心應答，取分應屬容易。
考點命中	1. 《資料結構》高點文化出版，王致強編著，6-7 二元搜尋樹。 2. 《資料結構》高點文化出版，王致強編著，10-2 二分搜尋法。

答：

(一)

1. 二分搜尋：

(1) 建置：資料須先排序後，置於一維陣列中，方可使用計算得到中間項的位置。

(2) 搜尋：取出中間項與搜尋的鍵值比較，相等則表示搜尋成功；鍵值小於中間項則往前半段搜尋；鍵值大於中間項則往後半段搜尋。如此重覆下去，直到搜尋成功或搜尋範圍變空的時候失敗為止。

2. 二元搜尋樹

(1) 建置：可以逐一將資料加入二元搜尋樹中，若鍵值小於樹根；則往左子樹插入；若大於樹根則往右子樹插入。直到樹葉則建立節點，以存放新資料。

(2) 搜尋：由樹根開始搜尋，若關鍵值等於樹根，則搜尋成功；若小於樹根，則往左子樹搜尋；若大於樹根則往右子樹搜尋；若搜尋到空指標，則搜尋失敗。

(二) 二分搜尋：

運作	甲	乙	何者較優
1. 尋找特定鍵值	$O(\log n)$	$O(\log n)$	相近
2. 尋找排序為 $j$ 的鍵值	$O(1)$	$O(\log n)$	甲
3. 刪除特定鍵值 $k$	$O(n)$	$O(\log n)$	乙
4. 刪除排序為 $j$ 的鍵值	$O(n)$	$O(\log n)$	乙
5. 插入新鍵值	$O(n)$	$O(\log n)$	乙
6. 依序輸出所有鍵值	$O(n)$	$O(n)$	相近

二、一非空的二元樹 (binary tree)，如果有  $n_0$  個葉節點 (leaf node) 且  $n_2$  個節點之分支度 (degree) 為 2，請證明  $n_0 = n_2 + 1$ 。(25分)

試題評析	本題為二元樹重要特性中，一個公式設的證明，為樹結構的重要推導，取分容易。
考點命中	《資料結構》高點文化出版，王致強編著，p.6-13 精選範例 10。

答：

一棵非空的二元樹有  $n (> 0)$  個節點，以  $b$  代表樹的總分支數，且  $n_i$  代表分支度為  $i$  的節點數，則可以如下推導：

$$b = n - 1 \dots (1)$$

$$n = n_0 + n_1 + n_2 \quad \dots\dots(2)$$

(2) 代入 (1) 得

$$b = n_0 + n_1 + n_2 - 1 \quad \dots\dots(3)$$

又分支亦有下面關係式

$$b = 0 \times n_0 + 1 \times n_1 + 2 \times n_2 = n_1 + 2n_2 \quad \dots\dots(4)$$

(3) 與 (4) 應相等，故

$$n_1 + 2n_2 = n_0 + n_1 + n_2 - 1$$

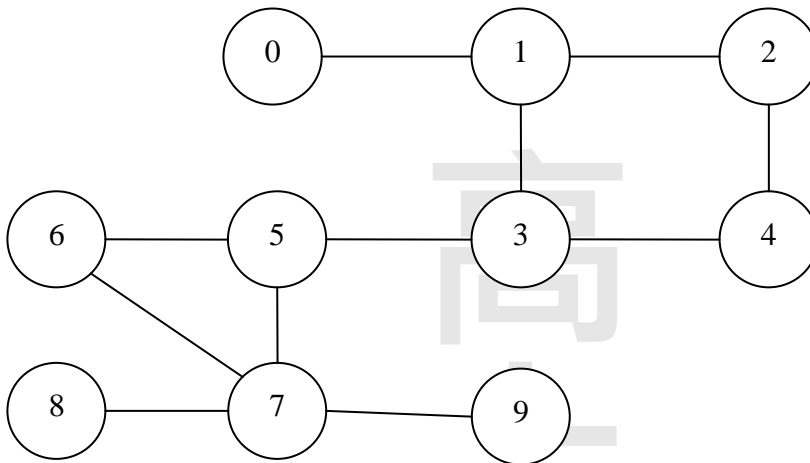
化簡即得  $n_0 = n_2 + 1$ 。

三、一無向圖  $G$  之節點集合為  $G(V) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，邊集合為  $G(E) = \{(0, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (5, 6), (5, 7), (6, 7), (7, 8), (7, 9)\}$ ；請列出  $G$  之接合點 (articulation point) 和畫出  $G$  的所有雙連通元件 (biconnected component)，雙連通元件須以節點和邊構成之子圖方式表示。(20分)

<b>試題評析</b>	本題為圖之接合點與雙連通元件的基本觀念題，只要觀念清楚，針對圖形可以容易找出接合點與雙連通元件，取分亦不難。
<b>考點命中</b>	《資料結構》高點文化出版，王致強編著，p.8-65精選範例45。

**答：**

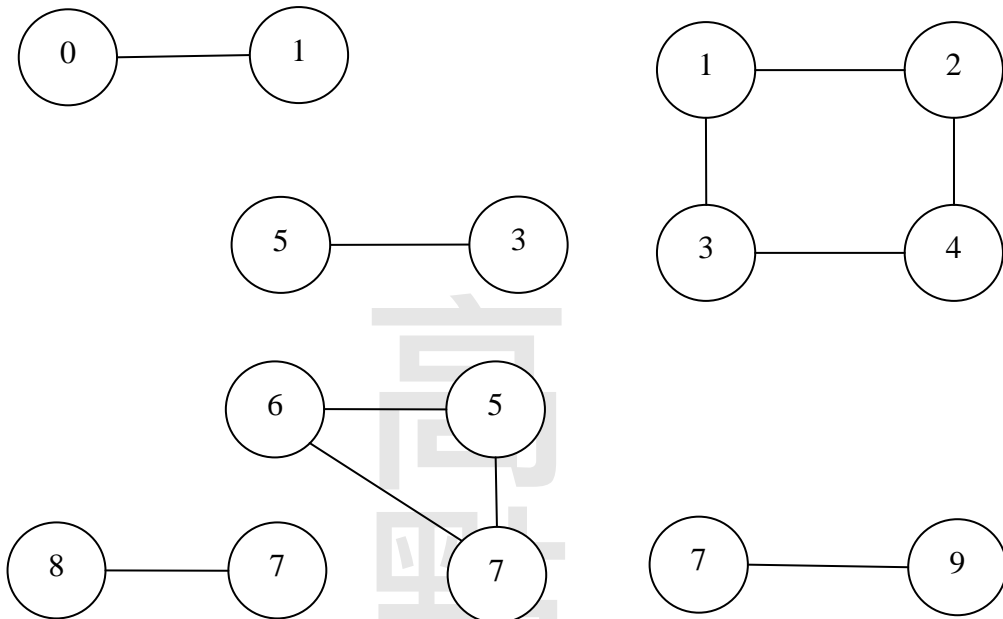
本題圖形如下：



1.  $G$  的 Articulation point 有 4 個：1, 3, 5, 7

2. 雙連通元件有 6 個，如下所示：

【版權所有，重製必究！】



四、對稱式最小-最大堆積 (Symmetric Min-Max Heap, 簡稱SMMH) 是一種優先佇列 (priority queue), 請回答下列與SMMH相關的問題。

- (一)請說明SMMH特性並說明以SMMH建構之優先佇列與以一般的堆積 (heap) 建構之優先佇列功能有何不同? 並從一個空的SMMH開始, 依序插入30, 20, 50, 5, 4, 9, 70, 2, 80。請畫出最後SMMH的樹狀結構圖。(10分)
- (二)請畫出第(一)小題建構的SMMH, 刪除數字2後SMMH的樹狀結構圖。(5分)
- (三)請以一維陣列設計一資料結構儲存SMMH, 該資料結構可以使節點透過其對應之陣列索引值 $x$ 構成的數學式計算出其祖父節點 $g$ 、父節點 $p$ 、左子節點 $l$ 、右子節點 $r$ 與兄弟節點 $s$ 等在陣列中的索引值。假設一維陣列之起始索引值為0, 請列出由 $x$ 構成之計算 $g$ 、 $p$ 、 $l$ 、 $r$ 、 $s$ 的數學式。並請畫出以此一維陣列儲存第(一)小題建構完成的SMMH的結果。(15分)

試題評析	本題為對稱型最小最大堆積的實作題, 必須熟悉各項操作才能取得前兩小題的分數。第(三)小題則是考一維陣列表示二元樹的方法, 其中必須推導各相關節點的計算公式, 稍微需要推導, 不過應該仍可取分。
考點命中	1.《資料結構》高點文化出版, 王致強編著, p.7-20第7-4節。 2.《資料結構》高點文化出版, 王致強編著, p.6-10 二元樹的隱念式陣列表示法。

答:

(一)SMMH建構的優先佇列, 可以提供3個運算:

Insertion: 插入新資料, 時間為 $O(\log n)$ 。

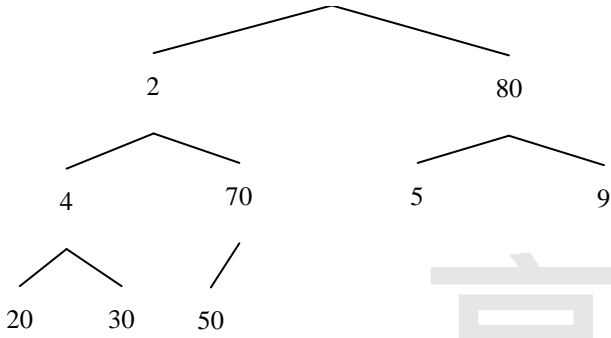
Delete-Min: 刪除最小的資料, 時間為 $O(\log n)$ 。

Delete-Max: 刪除最大的資料, 時間為 $O(\log n)$ 。

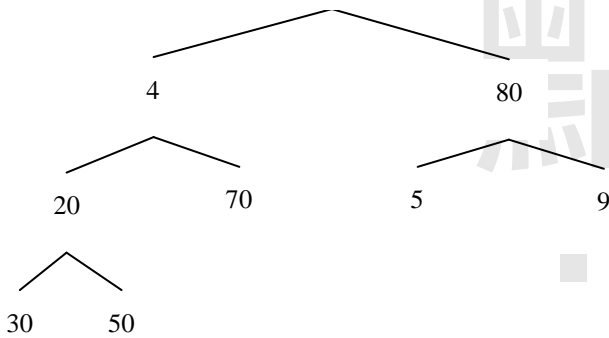
相對的, 一般堆積只提供Insertion 以及 Delete-Max或Delete-Min 其中一個, 時間全都是 $O(\log n)$ 。

依序插入資料30,20,50,5,4,9,70,2,80後, 建立的SMMH如下圖:

【版權所有, 重製必究!】



(二) 刪除2之後，SMMH如下：



(三) 節點的索引值為 $x$ ，陣列開頭索引為0，相關節點索引計算方式如下：

祖父節點  $g = \text{floor}((x-3)/4)$

父節點  $p = \text{floor}((x-1)/2)$

左子節點  $l = 2*x+1$

右子節點  $r = 2*s+2$

兄弟節點 if  $x$  is odd then  $s = x+1$  else  $s = x-1$

第(一)題的SMMH的一維陣列如下：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-	2	80	4	70	5	9	20	30	50

【版權所有，重製必究！】