《統計學概要》

註：本試題可能使用之查表值如下：

1. $\chi^2_a(n)$（具有自由度n之卡方分配之第100(1－α)分位數）：

$\chi^2_{0.025}(3)=9.3483$, $\chi^2_{0.975}(3)=0.2158$, $\chi^2_{0.025}(4)=11.1433$, $\chi^2_{0.975}(4)=0.4844$

$\chi^2_{0.025}(8)=17.5345$, $\chi^2_{0.975}(8)=2.1797$, $\chi^2_{0.025}(9)=19.0228$, $\chi^2_{0.975}(9)=2.7004$

2. $F_a(m,n)$（具有自由度(m,n)之F分配之第100(1－α)分位數）：

$F_{0.025}(3,8)=5.42$ $F_{0.975}(3,8)=0.0688$

$F_{0.025}(4,9)=4.72$ $F_{0.975}(4,9)=0.1124$

一、由兩組具有常態分配且相互獨立之母體（分別稱為母體I，母體II）分別抽出樣本數為$n_1=9$，$n_2=4$之兩組隨機樣本。（每小題10分，共20分）

（一）若已知母體I的變異數σ_1^2之95%信賴區間為[11.4061, 91.7557]，母體II的變異數σ_2^2之95%信賴區間為[5.1346, 222.4282]。請求出兩母體標準差比$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$之95%信賴區間。

（二）根據上述條件，請以顯著水準α＝0.05檢定兩母體變異數是否相等。

試題評析	本題(一)的信賴區間雖然有些許不同於考古題，但都是課堂上老師一直提醒同學們要留意之變化題型，故考生只要細心作答，高分不難。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第三回第十章，趙治勳編撰。

答：

母體：$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2) \perp X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

樣本：$X_{11},X_{12},\cdots,X_{19} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_{21},X_{22},\cdots,X_{24} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2,\sigma_2^2)$

(一) $S_1^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{9}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2}{9-1}, S_2^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}{4-1}$

由σ_1^2之95%信賴區間可得$\dfrac{(9\text{-}1)S_1^2}{\chi^2_{0.975(8)}}=\dfrac{(9\text{-}1)S_1^2}{2.1797}=91.7557 \Rightarrow S_1^2=25$

由σ_2^2之95%信賴區間可得$\dfrac{(4\text{-}1)S_2^2}{\chi^2_{0.025(8)}}=\dfrac{(4\text{-}1)S_2^2}{0.2158}=222.4282 \Rightarrow S_2^2=16$

樞紐量：$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(8,3)}$

機率區間：$P(F_{0.975(8,3)} \le \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le F_{0.025(8,3)})=0.95$

結論：$\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$之95%C.I.為$\left(\sqrt{\dfrac{S_2^2}{S_1^2}F_{0.975(8,3)}},\sqrt{\dfrac{S_2^2}{S_1^2}F_{0.025(8,3)}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{16}{25}\dfrac{1}{F_{0.025(3,8)}}},\sqrt{\dfrac{16}{25}F_{0.025(8,3)}}\right)$

$=\left(\sqrt{\dfrac{16}{25}\dfrac{1}{5.42}},\sqrt{\dfrac{16}{25}0.0688}\right)=(0.3436,3.05)$

(二) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ vs $H_1:\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$

由於(一)中95%之CI包含1，故在顯著水準為0.05下不拒絕H_0，我們沒有足夠證據去推論兩母體變異數

不相等($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)。

二、設X_1, X_2, . . . , X_7為抽自具有常態分配$N(0,\sigma^2)$之一組隨機樣本。(每小題10分,共20分)

(一)請求出c值以使$c(X_1+X_2+X_3)/\sqrt{X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2}$具有t分配。

(二)請求出d值以使$d(X_1^2+X_2^2+X_3^2)/\sqrt{X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2}$具有F分配。

試題評析	本題是考抽樣分配,與課本例題幾乎相同。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第三回第九章,趙治勳編撰。

答:

母體: $X \sim N(0,\sigma^2)$

樣本: $X_1, X_2, \cdots, X_7 \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$

(一)

$$\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma} \sim N(0,1) \quad \perp \quad \frac{X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(4)}$$

$$\frac{\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{\frac{X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2}{\sigma^2}}{4}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \frac{X_1+X_2+X_3}{X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2} \sim t_{(4)}$$

$$\therefore c = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$$

(二)

$$\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(3)} \quad \perp \quad \frac{X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(4)}$$

$$\frac{\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{\sigma^2} \Big/ 3}{\frac{X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2}{\sigma^2} \Big/ 4} = \frac{4}{3} \frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2} \sim F_{(3,4)}$$

$$\therefore d = \frac{4}{3}$$

三、一盒中置有4顆大小、形狀、重量完全相同的球,其中有3顆紅球、1顆白球。(每小題10分,共30分)

(一)若以不歸還方式由此盒依次隨機抽出3顆,令$\hat{P}$表樣本中白球之比率。請求出$\hat{P}$大於0.3之機率,即$\Pr[\hat{P} > 0.3]$。

(二)若以不歸還方式由此盒依次隨機抽出3顆,令變數X代表前2顆球之紅球顆數,變數Y代表最後1顆球之白球顆數,請求出X與Y之共變異數Cov(X, Y)。

(三)若以歸還方式由此盒隨機抽出3顆,令$\hat{P}$表樣本中白球之比率。請求出$\hat{P}$之變異數$\mathrm{Var}(\hat{P})$。

試題評析	本題是考抽樣分配，考生必需先瞭解題意，再依隨機變數之定義找出其分配。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第三回第九章，趙治勳編撰。

答：

(一)

令W表白球之個數，$W \sim Hyper(N=4, m=1, n=3)$

$$f_W(w) = \frac{\binom{1}{w}\binom{3}{3-w}}{\binom{4}{3}}, w = 0,1$$

$$P(\hat{P} > 0.3) = P(\frac{W}{3} > 0.3) = P(W > 0.9) = P(W = 1)$$

$$= \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

(二)

抽取次數 1	2	3	機率	
R	R	R	1/4	=>X=2,Y=0
R	R	W	1/4	=>X=2,Y=1
R	W	R	1/4	=>X=1,Y=0
W	R	R	1/4	=>X=1,Y=0

		Y: 0	1	$f_X(x)$
X	1	1/2	0	1/2
	2	1/4	1/4	1/2
	$f_Y(y)$	3/4	1/4	1

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

其中$E(XY) = 1\times 0\times\frac{1}{2} + 2\times 0\times\frac{1}{4} + 1\times 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$E(X) = 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$E(Y) = 0\times\frac{3}{4} + 1\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(三)

令U表白球之個數，$U \sim Bin(n=3, p=\frac{1}{4})$

$$\hat{P} = \frac{U}{3}$$

$$V(\hat{P}) = V(\frac{U}{3}) = \frac{V(U)}{9} = \frac{3(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})}{9} = \frac{1}{16}$$

四、由具有分配為 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$ 之母體抽出一組樣本數為3之隨機樣本 X_1, X_2, X_3。令 $\max\{X_1,X_2,X_3\}$ 及 $\min\{X_1,X_2,X_3\}$ 分別代表此組隨機樣本中最大和最小值，令變數 $R=\max\{X_1,X_2,X_3\}-\min\{X_1,X_2,X_3\}$ 代表全距。（每小題10分，共30分）

(一)請求出機率 $\Pr[\min\{X_1,X_2,X_3\}<2]$。

(二)請求出機率 $\Pr[\min\{X_1,X_2,X_3\}>1,\max\{X_1,X_2,X_3\}<2]$。

(三)請求出變數R之期望值，即E(R)。

試題評析	本題為整份考卷中數學較多之一題，考生們要有較好之數學底子，才能獲取高分。
考點命中	《高點・高上統計學講義》第三回第九章，趙治勳編撰。

答：

母體：$X \sim f_X(x)=\frac{1}{9}x^2, 0<x<3$，　$F_X(x)=P(X\le x)=\int_0^x \frac{1}{9}t^2dt=\begin{cases}0 & ,x<0\\ \frac{1}{27}x^3, & 0\le x<3\\ 1 & ,3\le x\end{cases}$

樣本：$X_1,X_2,X_3 \overset{iid}{\sim} f_X(x)$

令 $Y_1=\min\{X_1,X_2,X_3\}, Y_3=\max\{X_1,X_2,X_3\}$

(一) $P(\min(X_1,X_2,X_3)<2)=1-P(\min(X_1,X_2,X_3)\ge 2)=1-[P(X\ge 2)]^3$

$$=1-[1-F_X(2)]^3=1-[1-\frac{1}{27}(2^3)]^3=0.6515$$

(二) $P(\min(X_1,X_2,X_3)>1,\max(X_1,X_2,X_3)<2)$

$=P(1<X_1<2,1<X_2<2,1<X_3<2)=[P(1<X<2)]^3$

$=[P(X<2)-P(X\le 1)]^3=[F_X(2)-F_X(1)]^3=[\frac{1}{27}(2^3)-\frac{1}{27}(1^3)]^3=0.01743$

(三) $E(R)=E(Y_3-Y_1)=E(Y_3)-E(Y_1)=2.7-1.7357=0.9643$

其中

$$g_{Y_1}(y_1)=\frac{3!}{0!2!}[1-\frac{1}{27}y_1^3]^2\frac{1}{9}y_1^2=\frac{1}{2187}(729y_1^2-54y_1^5+y_1^8), 0<y_1<3$$

$$E(Y_1)=\int_0^3 y_1\frac{1}{2187}(729y_1^2-54y_1^5+y_1^8)dy_1=1.7357$$

$$g_{Y_3}(y_3)=\frac{3!}{2!0!}[\frac{1}{27}y_3^3]^2\frac{1}{9}y_3^2=\frac{1}{2187}y_3^8, 0<y_3<3$$

$$E(Y_3)=\int_0^3 y_3\frac{1}{2187}y_3^8dy_3=2.7$$